

# אלגוריתם הפרספטרון

הסבר מלא, אינטואיציה גאומטרית, דוגמה איטרטיבית והוכחת התכנסות מפורטת

גרסה מתוקנת ומיושרת לימין

המסמך מניח היכרות בסיסית עם וקטורים, מכפלה פנימית ונורמה אוקלידית. כל הטקסט, הכותרות וההסברים מיושרים לימין. הנוסחאות מוצגות כבלוקים מתמטיים ברורים.

## 1. מטרת האלגוריתם

הפרספטרון הוא אלגוריתם איטרטיבי ללמידת מסווג ליניארי בינארי. נתונה קבוצת דוגמאות מסומנות:

$$D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n, \quad x_i \in \mathbb{R}^d, \quad y_i \in \{-1, +1\}.$$

לכל דוגמה  $x_i$  מוצמדת תווית  $y_i$ . המטרה היא למצוא וקטור משקולות  $w$  ואיבר הטיה  $b$  כך שהסימן של הביטוי הבא יתאים לתווית:

$$\hat{y}_i = \text{sign}(w^T x_i + b).$$

גבול ההחלטה הוא קבוצת הנקודות המקיימות:

$$w^T x + b = 0.$$

במישור זהו ישר; בשלושה ממדים זהו מישור; ובממד כללי זהו היפר-מישור.

## 2. המשמעות הגאומטרית של $w$ ושל $b$

הווקטור  $w$  מאונך לגבול ההחלטה. כדי לראות זאת, ניקח שתי נקודות  $x_a, x_b$  הנמצאות על הגבול. לכן:

$$w^T x_a + b = 0,$$

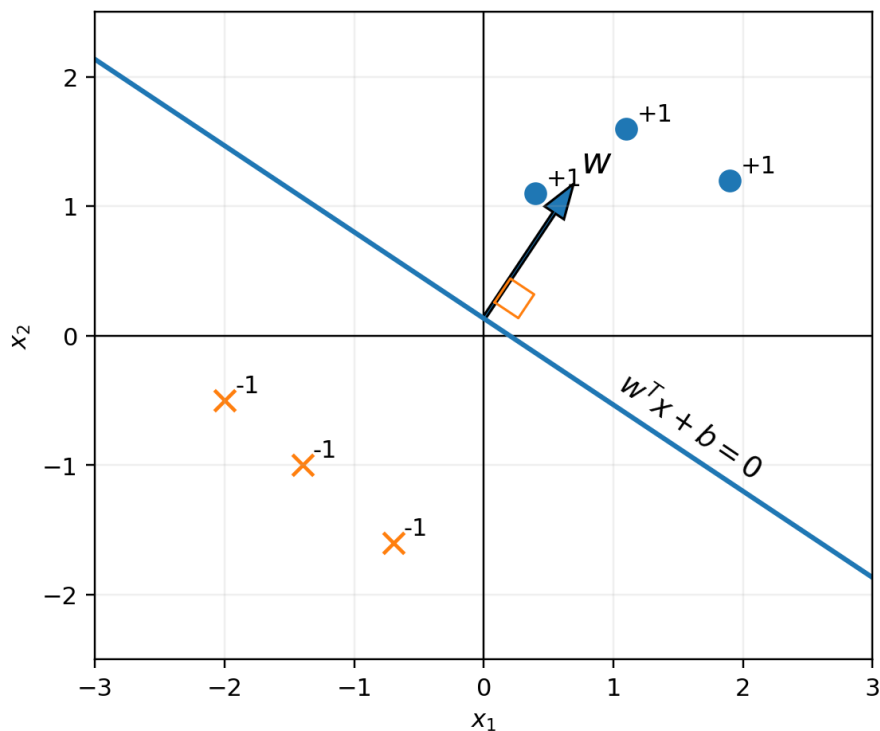
$$w^T x_b + b = 0.$$

בחיסור שתי המשוואות מתקבל:

$$w^T (x_a - x_b) = 0.$$

הווקטור  $x_a - x_b$  הוא וקטור כיוון של הישר, ולכן המכפלה הפנימית שלו עם  $w$  שווה לאפס. מכאן ש- $w$  מאונך לישר.

הווקטור  $w$  קובע את הכיוון של הגבול. איבר ההטיה  $b$  מזיז את הגבול במקביל לעצמו. שינוי  $b$  אינו משנה את הנורמל  $w$ .



איור 1: הווקטור  $w$  מאונך לגבול ההחלטה  $w^T x + b = 0$  ומצביע לעבר הצד שבו ערך פונקציית ההחלטה חיובי.

### 3. אלגוריתם הפרספטרון

מתחילים בדרך כלל מ- $w^{(0)} = 0$  ומ- $b^{(0)} = 0$ . עוברים על הדוגמאות בזו אחר זו. עבור דוגמה  $(x_i, y_i)$  מחשבים את הציון:

$$s_i = w^T x_i + b.$$

הדוגמה מסווגת נכון כאשר:

$$y_i(w^T x_i + b) > 0.$$

אם מתקיים:

$$y_i(w^T x_i + b) \leq 0,$$

הדוגמה מסווגת בטעות או נמצאת בדיוק על גבול ההחלטה. במקרה זה מבצעים את העדכון, בקצב למידה  $\eta > 0$ :

$$w \leftarrow w + \eta y_i x_i,$$

$$b \leftarrow b + \eta y_i.$$

כאשר  $\eta = 1$  מתקבל העדכון הקלאסי.

**הבחנה חשובה בין האינדקסים:** האינדקס  $i$  מציין את מספר הדוגמה בקבוצת הנתונים. האינדקס  $m$  מציין את מספר העדכונים שבוצעו עד כה. אם בעדכון ה- $m$  האלגוריתם טעה בדוגמה שמספרה  $i_m$ , כותבים:

$$w^{(m+1)} = w^{(m)} + y_{i_m} x_{i_m}.$$

לא מופיע כאן  $x_{i+1}$ , משום שהעדכון משתמש רק בדוגמה שעליה התרחשה הטעות.

## 4. מדוע העדכון מתקן את הדוגמה הנוכחית?

נניח שהאלגוריתם טעה בדוגמה  $(x_i, y_i)$ , ונבחן את הציון החתום שלה לאחר העדכון. ללא איבר ההטיה, כדי לפשט את הכתיבה:

$$w_{\text{new}} = w + y_i x_i.$$

הציון החתום החדש הוא:

$$y_i(w_{\text{new}}^T x_i) = y_i(w^T x_i) + \|x_i\|^2.$$

מכיוון ש- $\|x_i\|^2 > 0$  עבור דוגמה שאינה וקטור האפס, הציון החתום של אותה דוגמה גדל. לכן העדכון דוחף את הדוגמה בכיוון הנכון.

זהו הסבר מקומי בלבד: תיקון של דוגמה אחת עלול לפגוע זמנית בסיווג של דוגמה אחרת. לכן נדרשת הוכחה גלובלית המראה שמספר הטעויות סופי כאשר הנתונים ניתנים להפרדה ליניארית.

## 5. הפרדה ליניארית ומרווח

נניח שקיים וקטור יחידה  $w^*$  המסווג את כל הדוגמאות נכון עם מרווח חיובי  $\gamma$ :

$$\|w^*\| = 1, \quad y_i((w^*)^T x_i) \geq \gamma > 0 \quad \text{לכל } i.$$

נניח בנוסף שכל הדוגמאות חסומות בנורמה:

$$\|x_i\| \leq R \quad \text{לכל } i.$$

המשמעות של תנאי המרווח היא:

כאשר  $y_i = +1$ , מתקיים  $(w^*)^T x_i \geq \gamma$ . כאשר  $y_i = -1$ , מתקיים  $(w^*)^T x_i \leq -\gamma$ . לכן כל הדוגמאות נמצאות בצד הנכון של הגבול, ובמרחק חיובי ממנו.

$R$  מודד את הגודל המרבי של וקטורי הקלט.  $\gamma$  מודד עד כמה ההפרדה ברורה. ככל שהיחס  $\gamma/R$  גדול יותר, הבעיה קלה יותר עבור הפרספטרון.

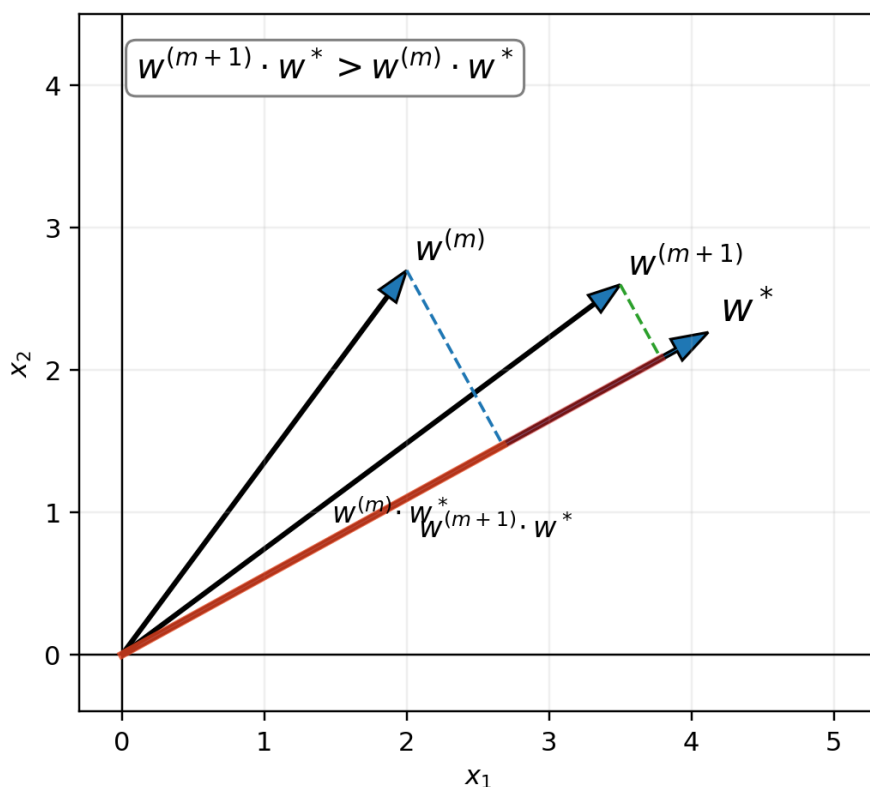
## 6. למה משתמשים במכפלה הפנימית עם $w^*$ ?

המכפלה הפנימית  $w^* \cdot w^{(m)}$  משמשת בהוכחה כדי למדוד כמה מווקטור המשקולות הנוכחי נמצא בכיוון של מפריד נכון.

הווקטור המפריד נבחר כווקטור יחידה:

$$w^{(m)} \cdot w^* = \|w^{(m)}\| \cos \theta_m,$$

כאשר  $\theta_m$  היא הזווית בין  $w^{(m)}$  לבין  $w^*$ . זהו ההיטל החתום של  $w^{(m)}$  על הכיוון  $w^*$ . אם ההיטל גדל, הרכיב של  $w^{(m)}$  בכיוון  $w^*$  גדל. אין פירוש הדבר שהזווית חייבת לקטון בכל עדכון, משום שגם הרכיב המאונך עשוי לגדול. ההוכחה משתמשת גם בחסם על הנורמה של  $w^{(m)}$ .



איור 2: ההיטל על  $w^*$  מודד את הרכיב של וקטור המשקולות בכיוון של מפריד נכון.

## 7. משפט ההתכנסות של הפרספטרום

**משפט:** אם קיימים  $w^*$ ,  $\gamma > 0$  ו- $R > 0$  המקיימים

$$\|w^*\| = 1, \quad y_i(w^* \cdot x_i) \geq \gamma, \quad \|x_i\| \leq R,$$

אז מספר הטעויות הכולל  $M$  של הפרספטרום חסום על ידי

$$M \leq \left(\frac{R}{\gamma}\right)^2.$$

ההוכחה מורכבת משלושה חלקים: חסם מלמטה על ההתקדמות בכיוון  $w^*$ , חסם מלמעלה על אורך וקטור המשקולות, ושילוב שני החסמים.

### 7.1 חלק ראשון: ההיטל על מפריד נכון גדל בכל טעות

נסמן ב- $i_m$  את אינדקס הדוגמה שעליה התרחשה הטעות ה- $m+1$ . העדכון הוא:

$$w^{(m+1)} = w^{(m)} + y_{i_m} x_{i_m}.$$

ניקח מכפלה פנימית עם  $w^*$ :

$$w^{(m+1)} \cdot w^* = w^{(m)} \cdot w^* + y_{i_m} (x_{i_m} \cdot w^*).$$

מתנאי המרווח:

$$y_{i_m}(x_{i_m} \cdot w^*) \geq \gamma.$$

ולכן:

$$w^{(m+1)} \cdot w^* \geq w^{(m)} \cdot w^* + \gamma.$$

כעת נוכיח באינדוקציה שלאחר  $m$  טעויות מתקיים:

$$w^{(m)} \cdot w^* \geq m\gamma.$$

**בסיס האינדוקציה:** לפני שבוצע עדכון כלשהו,  $w^{(0)} = 0$ , ולכן:

$$w^{(0)} \cdot w^* = 0 = 0\gamma.$$

**צעד האינדוקציה:** נניח שלאחר  $m$  טעויות מתקיים:

$$w^{(m)} \cdot w^* \geq m\gamma.$$

לאחר הטעות הבאה:

$$\begin{aligned} w^{(m+1)} \cdot w^* &\geq w^{(m)} \cdot w^* + \gamma \\ &\geq m\gamma + \gamma \\ &= (m+1)\gamma. \end{aligned}$$

זהו התיקון החשוב: בשורה האחרונה צריך להופיע  $(m+1)\gamma$ , ולא  $m\gamma$ .

לכן, לאחר  $M$  טעויות:

$$w^{(M)} \cdot w^* \geq M\gamma.$$

החסם גדל באופן ליניארי במספר הטעויות.

## 7.2 חלק שני: הנורמה של $w$ אינה גדלה מהר מדי

נבחן את ריבוע הנורמה לאחר עדכון:

$$\|w^{(m+1)}\|^2 = \|w^{(m)} + y_{i_m}x_{i_m}\|^2.$$

לפי נוסחת ריבוע הנורמה:

$$\|w^{(m+1)}\|^2 = \|w^{(m)}\|^2 + 2y_{i_m}(w^{(m)} \cdot x_{i_m}) + \|x_{i_m}\|^2.$$

העדכון מתבצע רק כאשר הדוגמה אינה מסווגת נכון. לכן:

$$y_{i_m}(w^{(m)} \cdot x_{i_m}) \leq 0.$$

מכאן שהאיבר האמצעי אינו חיובי, ולכן:

$$\|w^{(m+1)}\|^2 \leq \|w^{(m)}\|^2 + \|x_{i_m}\|^2.$$

מתנאי החסימות של דוגמאות האימון:

$$\|w^{(m+1)}\|^2 \leq \|w^{(m)}\|^2 + R^2.$$

נוכיח באינדוקציה:

$$\|w^{(m)}\|^2 \leq mR^2.$$

**בסיס האינדוקציה:**

$$\|w^{(0)}\|^2 = 0 \leq 0R^2.$$

**צעד האינדוקציה:** אם  $\|w^{(m)}\|^2 \leq mR^2$ , אז:

$$\begin{aligned}\|w^{(m+1)}\|^2 &\leq \|w^{(m)}\|^2 + R^2 \\ &\leq mR^2 + R^2 \\ &= (m+1)R^2.\end{aligned}$$

לכן לאחר  $M$  טעויות:

$$\|w^{(M)}\|^2 \leq MR^2.$$

הוצאת שורש נותנת:

$$\|w^{(M)}\| \leq R\sqrt{M}.$$

המשמעות היא שאורך וקטור המשקולות גדל לכל היותר בקצב של שורש מספר הטעויות, ולא בקצב ליניארי במספר הטעויות.

### 7.3 חלק שלישי: שילוב שני החסמים

לפי אי-שוויון קושי-שוורץ:

$$w^{(M)} \cdot w^* \leq \|w^{(M)}\| \|w^*\|.$$

מכיוון שווקטור המפריד מנורמל ליחידה:

$$w^{(M)} \cdot w^* \leq \|w^{(M)}\|.$$

נשלב את שלושת החסמים:

$$M\gamma \leq w^{(M)} \cdot w^* \leq \|w^{(M)}\| \leq R\sqrt{M}.$$

כאשר מספר הטעויות חיובי, אפשר לחלק בשורש מספר הטעויות:

$$\sqrt{M} \gamma \leq R.$$

המרווח חיובי, ולכן נחלק בו ונעלה בריבוע:

$$M \leq \left(\frac{R}{\gamma}\right)^2.$$

לכן מספר הטעויות סופי. הפרספטון אינו יכול להמשיך לטעות ללא סוף כאשר הנתונים ניתנים להפרדה ליניארית עם מרווח חיובי.

### 7.4 האינטואיציה שמאחורי ההוכחה

ההוכחה משווה בין שתי מהירויות גדילה:

ההתקדמות בכיוון המפריד הנכון גדלה לפחות כמו  $M_\gamma$ , כלומר בקצב ליניארי במספר הטעויות. לעומת זאת, האורך הכולל של וקטור המשקולות גדל לכל היותר כמו  $R\sqrt{M}$ . היטל של וקטור על כיוון יחידה אינו יכול להיות גדול מאורך הווקטור עצמו. לכן לא ייתכן שהחסם הליניארי  $M_\gamma$  ימשיך לגדול ללא סוף בעוד שהנורמה חסומה בקצב  $R\sqrt{M}$ . מכאן שמספר הטעויות חייב להיות סופי.

## 8. דוגמה איטרטיבית מלאה

נשתמש בארבע דוגמאות במישור:

$$\begin{aligned}x_1 &= (1, 1), & y_1 &= +1, \\x_2 &= (1.8, 1.2), & y_2 &= +1, \\x_3 &= (0.2, 0.1), & y_3 &= -1, \\x_4 &= (-0.5, -0.2), & y_4 &= -1.\end{aligned}$$

נסרוק את הדוגמאות בסדר הבא:

$$x_1, x_3, x_2, x_4.$$

נשתמש בקצב למידה השווה ליחידה:

$$\eta = 1.$$

מצב ההתחלה הוא:

$$w^{(0)} = (0, 0), \quad b^{(0)} = 0.$$

### 8.1 עדכון ראשון

בעדכון הראשון נבדקת הדוגמה:

$$x_1 = (1, 1), \quad y_1 = +1.$$

$$s_1 = (w^{(0)})^T x_1 + b^{(0)} = 0.$$

הנקודה נמצאת על הגבול, ולכן מבצעים עדכון:

$$w^{(1)} = w^{(0)} + y_1 x_1 = (1, 1),$$

$$b^{(1)} = b^{(0)} + y_1 = 1.$$

גבול ההחלטה החדש הוא:

$$x_1 + x_2 + 1 = 0.$$

### 8.2 עדכון שני

כעת נבדקת הדוגמה השלילית:

$$x_3 = (0.2, 0.1), \quad y_3 = -1.$$

$$s_3 = (1, 1) \cdot (0.2, 0.1) + 1 = 1.3.$$

הציון חיובי, אך התווית היא  $-1$ , ולכן זו טעות. נעדכן:

$$w^{(2)} = (1, 1) - (0.2, 0.1) = (0.8, 0.9),$$

$$b^{(2)} = 1 - 1 = 0.$$

גבול ההחלטה כעת הוא:

$$0.8x_1 + 0.9x_2 = 0.$$

## 8.3 עדכון שלישי

במעבר הבא נבדקת שוב אותה דוגמה שלילית. היא עדיין מסווגת בטעות:

$$s_3 = (0.8, 0.9) \cdot (0.2, 0.1) = 0.25 > 0.$$

לכן:

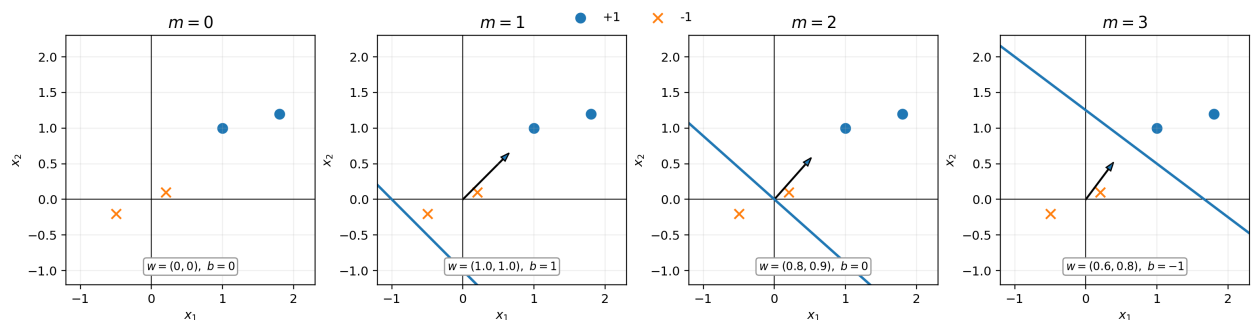
$$w^{(3)} = (0.8, 0.9) - (0.2, 0.1) = (0.6, 0.8),$$

$$b^{(3)} = 0 - 1 = -1.$$

גבול ההחלטה הסופי הוא:

$$0.6x_1 + 0.8x_2 - 1 = 0.$$

בדיקה של ארבע הדוגמאות מראה ששתי הדוגמאות החיוביות מקבלות ציון חיובי ושתי הדוגמאות השליליות מקבלות ציון שלילי. לכן במעבר הבא לא מתבצע עדכון נוסף והאלגוריתם עוצר.



איור 3: תהליך איטרטיבי: מצב התחלתי ושלושת גבולות ההחלטה המתקבלים לאחר שלושת העדכונים. החץ בכל תרשים מייצג את  $w$  והוא מאונך לישר ההחלטה.

## 9. מה קורה כאשר יש איבר הטיה $b$ ?

אפשר לכלול את  $b$  בתוך וקטור המשקולות באמצעות וקטורים מורחבים:

$$\tilde{x}_i = (x_i, 1), \quad \tilde{w} = (w, b).$$

אז:

$$\tilde{w}^T \tilde{x}_i = w^T x_i + b.$$

העדכון נכתב בצורה אחידה:

$$\tilde{w} \leftarrow \tilde{w} + y_i \tilde{x}_i.$$

מחסימות הקלט המקוריות מתקיים:

$$\|x_i\| \leq R.$$

לכן:

$$\|\tilde{x}_i\| = \sqrt{\|x_i\|^2 + 1} \leq \sqrt{R^2 + 1}.$$

לכן אותה הוכחת התכנסות חלה בממד אחד נוסף, עם חסם קלט מורחב  $\tilde{R} = \sqrt{R^2 + 1}$ .

## 10. מה המשפט אינו מבטיח?

משפט ההתכנסות מבטיח שהפרספטרון ימצא מפריד נכון עבור קבוצת האימון כאשר הנתונים ניתנים להפרדה ליניארית. הוא אינו מבטיח:

- שהמפריד שיימצא יהיה יחיד.
- שהמפריד יהיה בעל המרווח הגדול ביותר.
- שהזווית בין  $w^{(m)}$  לבין  $w^*$  תקטן בכל עדכון.
- שהאלגוריתם יתכנס כאשר הנתונים אינם ניתנים להפרדה ליניארית.

כאשר הנתונים אינם ניתנים להפרדה, הפרספטרון הקלאסי עלול להמשיך לבצע עדכונים. במצב כזה אפשר להגביל את מספר האפוקים, להשתמש ב-Pocket Algorithm, להשתמש בפרספטרון ממוצע, או לבחור מודל אחר כגון רגרסיה לוגיסטית או SVM עם מרווח רך.

## 11. פסאודו-קוד

```
initialize  $w = 0, b = 0$ 
repeat for several epochs:
    mistakes = 0
    for each training example  $(x_i, y_i)$ :
        if  $y_i * (w \text{ dot } x_i + b) \leq 0$ :
             $w = w + \eta * y_i * x_i$ 
             $b = b + \eta * y_i$ 
            mistakes = mistakes + 1
    if mistakes == 0:
        stop
```

איור 4: פסאודו-קוד של אלגוריתם הפרספטרון. הקוד מוצג משמאל לימין כדי לשמור על כתיבה תקינה של פקודות ותנאים.

## 12. מימוש קצר בפייתון

```
import numpy as np

def train_perceptron(X, y, learning_rate=1.0, max_epochs=100):
    """Train a binary perceptron with labels -1 and +1."""
    X = np.asarray(X, dtype=float)
    y = np.asarray(y, dtype=int)

    if X.ndim != 2:
        raise ValueError("X must be a two-dimensional matrix")
    if y.shape != (X.shape[0],):
        raise ValueError("y must contain one label per row of X")
    if not np.all(np.isin(y, [-1, 1])):
        raise ValueError("labels must be -1 or +1")

    w = np.zeros(X.shape[1], dtype=float)
    b = 0.0

    for epoch in range(max_epochs):
        mistakes = 0

        for x_i, y_i in zip(X, y):
            signed_score = y_i * (np.dot(w, x_i) + b)

            if signed_score <= 0:
                w += learning_rate * y_i * x_i
                b += learning_rate * y_i
                mistakes += 1

        if mistakes == 0:
            return w, b, epoch + 1

    return w, b, max_epochs
```

איור 5: מימוש מלא וקצר בפייתון, כולל בדיקות קלט ועצירה מוקדמת לאחר אפוק ללא טעויות.

## 13. סיכום

הפרספטרון מעדכן את המשקולות רק כאשר דוגמה אינה מסווגת נכון. כל עדכון מתקן את הציון החתום של הדוגמה הנוכחית ומגדיל לפחות ב- $\gamma$  את ההיטל על מפריד נכון קבוע.

בהוכחת ההתכנסות מתקבלים שני חסמים מרכזיים:

$$w^{(M)} \cdot w^* \geq M\gamma,$$

$$\|w^{(M)}\| \leq R\sqrt{M}.$$

שילובם באמצעות אי-שוויון קושי-שוורץ נותן:

$$M \leq \left(\frac{R}{\gamma}\right)^2.$$

לכן, כאשר הנתונים ניתנים להפרדה ליניארית, מספר הטעויות של הפרספטרון סופי.

נקודות מרכזיות שכדאי לזכור:

- האינדקס  $i$  מתייחס לדוגמה בקבוצת הנתונים, ואילו האינדקס  $m$  מתייחס למספר העדכונים או הטעויות.
- וקטור המשקולות  $w$  מאונך לגבול ההחלטה; איבר ההטיה  $b$  מזיז את הגבול במקביל לעצמו.
- ההיטל על  $w^*$  משמש בהוכחה כמדד להתקדמות בכיוון של מפריד נכון.
- בשלב האינדוקציה מתקבל  $\gamma(m+1)$ , ולא  $m\gamma$ .
- ההתכנסות מובטחת רק בהנחת הפרדה ליניארית עם מרווח חיובי.
- הפרספטרון מוצא מפריד נכון, אך לא בהכרח מפריד בעל מרווח מרבי.