

K-means בלמידת מכונה

ניסוח מתמטי, אלגוריתם, התכנסות ודוגמאות

מסמך ברמה מתמטית אקדמית

אוגוסט 2026

למידה לא-מונחית (Unsupervised Learning) עוסקת במצבים שבהם נתונה קבוצת תצפיות ללא תוויות ידועות מראש. משימת האשכולות מחלקת את התצפיות לקבוצות כך שנקודות בתוך אותה קבוצה יהיו דומות, ונקודות בקבוצות שונות יהיו מובחנות ככל האפשר.

K-means הוא אלגוריתם מרכזי לאשכולות. הוא מייצג כל אשכול באמצעות מרכז (centroid), וממזער את סכום ריבועי המרחקים של הנקודות מן המרכז של האשכול שאליו הן משויכות.

הגדרה: קבוצת הנתונים

נתונות n תצפיות, כאשר כל תצפית היא וקטור מממד d . לדוגמה, אם לכל אדם נמדדים גיל, גובה ומשקל, אז $d=3$.

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_i \in \mathbb{R}^d$$

2. הניסוח המתמטי של K-means

נבחר מספר אשכולות K . לכל תצפית מתאים משתנה בדיד המתאר את האשכול שלה, ולכל אשכול מוגדר וקטור מרכז.

$$z_i \in \{1, \dots, K\}, \quad \mu_k \in \mathbb{R}^d$$

פונקציית המטרה היא סכום ריבועי המרחקים מן המרכזים:

$$J(z, \mu) = \sum_{i=1}^n \|x_i - \mu_{z_i}\|_2^2$$

אם נסמן את קבוצת האינדקסים של האשכול k על ידי C_k , ניתן לכתוב את אותה פונקציה בצורה מפורקת לאשכולות:

$$J = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in C_k} \|x_i - \mu_k\|_2^2$$

גודל זה נקרא לעיתים **Within-Cluster Sum of Squares (WCSS)**. בעיית האופטימיזציה אינה קמורה: ההשמות z_i הן משתנים בדידים, בעוד שהמרכזים μ_k הם רציפים. לכן האלגוריתם הסטנדרטי אינו מבטיח מינימום גלובלי.

3. אלגוריתם Lloyd: שתי פעולות מתחלפות

3.1 שלב ההשמה

כאשר המרכזים קבועים, כל נקודה משויכת למרכז הקרוב ביותר:

$$z_i \leftarrow \operatorname{argmin}_{1 \leq k \leq K} \|x_i - \mu_k\|_2^2$$

3.2 שלב עדכון המרכזים

כאשר ההשמות קבועות, כל מרכז מוחלף במוצע הנקודות באשכול שלו:

$$\mu_k \leftarrow \frac{1}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} x_i$$

- אין שינוי בהשמות בין שתי איטרציות עוקבות.
- השינוי בפונקציית המטרה קטן מסף ϵ שנבחר מראש.
- הוזן מספר איטרציות מרבי, לצורך בקרה חישובית.

4. מדוע הממוצע הוא המרכז האופטימלי?

משפט 1

לקבוצה לא ריקה של נקודות, הנקודה היחידה הממזערת את סכום ריבועי המרחקים האוקלידיים היא הממוצע האריתמטי שלהן.

תהי קבוצה של m נקודות. נגדיר פונקציה של מרכז מועמד μ :

$$f(\mu) = \sum_{i=1}^m \|x_i - \mu\|_2^2$$

לאחר פתיחת המכפלה הפנימית וגזירה לפי הווקטור μ מתקבל:

$$\nabla_{\mu} f(\mu) = 2m\mu - 2 \sum_{i=1}^m x_i$$

השוואת הגרדיאנט לאפס נותנת את נקודת המועמד:

$$\mu^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

ההסיאן הוא $2mI_d$, מטריצה חיובית לחלוטין; לכן מדובר במינימום יחיד. זהו ההצדק המתמטי המדויק לשלב עדכון המרכזים ב-K-means.

דרך חלופית להוכחה משתמשת בזהות פירוק השונות הבאה, כאשר $\bar{x}$ הוא ממוצע האשכול וכל a הוא מרכז מועמד:

$$\sum_{i=1}^m \|x_i - a\|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i - \bar{x}\|^2 + m\|a - \bar{x}\|^2$$

האיבר השני אינו שלילי, והוא מתאפס בדיוק כאשר $a = \bar{x}$.

5. ירידה מונוטונית, התכנסות ועצירה סופית

בחלק זה נבחין בין שלוש טענות שונות: (א) פונקציית המטרה אינה גדלה מאיטרציה לאיטרציה; (ב) סדרת ערכי פונקציית המטרה מתכנסת; (ג) תחת הנחות רגילות, אלגוריתם Lloyd עצמו נעצר לאחר מספר סופי של שינויי השמה. ההבחנה חשובה: ירידה מונוטונית וחסם תחתון לבדם מוכיחים התכנסות של ערכי J , אך אינם מוכיחים כשלעצמם שההשמות או המרכזים מפסיקים להשתנות בזמן סופי.

1.5 סימון האיטרציות

נניח שבתחילת איטרציה נתונות השמות ומרכזים. שלב ההשמה משנה רק את ההשמות כאשר המרכזים נשארים קבועים; לאחר מכן שלב העדכון משנה רק את המרכזים. נסמן את שלושת המצבים — לפני ההשמה, לאחר ההשמה ולאחר עדכון המרכזים — באמצעות הנוסחה הבאה:

$$J_t = J(z^{(t)}, \mu^{(t)}), \quad \tilde{J}_t = J(z^{(t+1)}, \mu^{(t)}), \quad J_{t+1} = J(z^{(t+1)}, \mu^{(t+1)})$$

2. 5 למת ההשמה: שלב ההשמה אינו מגדיל את J

למה 2

כאשר המרכזים קבועים, בחירת המרכז הקרוב ביותר לכל נקודה ממזער את פונקציית המטרה ביחס למשתני ההשמה. לכן שלב ההשמה אינו מגדיל את ערך פונקציית המטרה.

אכן, פונקציית המטרה היא סכום של n איברים, וכל משתנה השמה מופיע רק באיבר המתאים לנקודה אחת. לפיכך ניתן למזער כל איבר בנפרד, כפי שמראה נוסחת ההשמה:

$$z_i^{(t+1)} \in \arg \min_{1 \leq k \leq K} \|x_i - \mu_k^{(t)}\|^2$$

מכאן מתקבלת במפורש הירידה בשלב ההשמה:

$$J_t - \tilde{J}_t = \sum_{i=1}^n \left(\|x_i - \mu_{z_i^{(t)}}^{(t)}\|^2 - \min_{1 \leq k \leq K} \|x_i - \mu_k^{(t)}\|^2 \right) \geq 0$$

אם לפחות נקודה אחת עוברת למרכז שהוא קרוב אליה באופן ממשי יותר, הירידה היא ממשית. שוויון יכול להתרחש כאשר אין שינוי בהשמות, או במקרה דגנרטיבי של שוויון מדויק בין המרחקים לשני מרכזים.

3. 5 למת העדכון: שלב חישוב הממוצעים אינו מגדיל את J

למה 3

כאשר ההשמות קבועות, החלפת כל מרכז בממוצע הנקודות באשכול שלו ממזער את פונקציית המטרה ביחס למרכזים. לכן שלב עדכון המרכזים אינו מגדיל את ערך פונקציית המטרה.

לפי זהות פירוק השונות ממשפט 1, עבור כל אשכול, המרכז הישן והממוצע החדש מקיימים את הזהות הבאה:

$$\sum_{i \in C_k^{(t+1)}} \|x_i - \mu_k^{(t)}\|^2 = \sum_{i \in C_k^{(t+1)}} \|x_i - \mu_k^{(t+1)}\|^2 + |C_k^{(t+1)}| \|\mu_k^{(t)} - \mu_k^{(t+1)}\|^2$$

לאחר סכימה על כל האשכולות נקבל נוסחה מדויקת לכמות הירידה בשלב העדכון:

$$\tilde{J}_t - J_{t+1} = \sum_{k=1}^K |C_k^{(t+1)}| \|\mu_k^{(t)} - \mu_k^{(t+1)}\|^2 \geq 0$$

כל האיברים באגף ימין אינם שליליים. לכן שלב העדכון מוריד ממש את פונקציית המטרה, אלא אם כל המרכזים כבר שווים לממוצעי האשכולות שלהם.

4. 5 משפט הירידה המונוטונית והתכנסות ערכי המטרה

משפט 2

בכל איטרציה של Lloyd שבה האשכולות אינם ריקים, ערך פונקציית המטרה בסוף האיטרציה אינו גדול מערכו בתחילתה. בפרט, סדרת ערכי פונקציית המטרה מתכנסת לערך סופי ולא-שלילי.

הוכחה. משתי הלמות הקודמות מתקבלת השרשרת:

$$J_{t+1} \leq \tilde{J}_t \leq J_t$$

מכאן סדרת ערכי המטרה היא מונוטונית לא-עולה. נוסף על כך, כל ערך הוא סכום של ריבועי נורמות ולכן הוא אינו שלילי. לפי משפט ההתכנסות לסדרות מונוטוניות וחסומות קיים גבול:

$$J_t \downarrow J_\infty, \quad J_\infty \geq 0$$

נקודה לוגית חשובה

עד כאן הוכחנו רק שסדרת הערכים המספריים של פונקציית המטרה מתכנסת. אין בכך לבדו הוכחה שהמרכזים או ההשמות נעצרים בזמן סופי: סדרה מספרית יכולה לרדת לנצח בצעדים הולכים וקטנים ולהתכנס לגבול מבלי להיות קבועה. לצורך עצירה סופית נשתמש בעובדה שמספר ההשמות האפשריות הוא סופי.

5.5 משפט העצירה הסופית של Lloyd

משפט 3

נניח שבכל איטרציה האשכולות אינם ריקים, ושאינן שוויוני מרחקים בין מרכזים מתחרים. לחלופין, ניתן להשתמש בכלל הכרעה דטרמיניסטי עקבי המונע מעבר מחזורי בין מצבי שוויון. תחת הנחות אלה אלגוריתם Lloyd מגיע לאחר מספר סופי של איטרציות לנקודת קיבוע.

הוכחה. כל אחת מ- n הנקודות יכולה לקבל אחת מ- K תוויות אשכול, ולכן מספר ההשמות המתויגות הוא סופי וחסום כפי שמוצג בנוסחה הבאה. עבור השמה קבועה, ובהנחה שכל אשכול אינו ריק, המרכזים נקבעים באופן יחיד כממוצעי האשכולות. לכן אותה השמה מגדירה תמיד אותם מרכזים ואת אותו ערך של פונקציית המטרה.

$$N_{\text{assign}} \leq K^n$$

כעת נניח שהאלגוריתם עדיין אינו בנקודת קיבוע. אם ההשמה משתנה, ובהיעדר שוויוני מרחקים, לפחות נקודה אחת עוברת למרכז קרוב ממש יותר. לפי למה 2 מתקבלת ירידה ממשית בפונקציית המטרה, ולאחר שלב העדכון היא יכולה רק לרדת עוד:

$$z^{(t+1)} \neq z^{(t)} \implies J_{t+1} < J_t$$

מכאן שהאלגוריתם אינו יכול לחזור להשמה שכבר הופיעה: חזרה לאותה השמה הייתה מחזירה את אותם ממוצעים ואת אותו ערך מטרה, בסתירה לירידה הממשית. מאחר שקיים רק מספר סופי של השמות, לאחר מספר סופי של שינויי השמה חייבת להתקבל השמה שאינה משתנה. באותו מצב שלב העדכון מחזיר שוב את אותם ממוצעים; לכן גם המרכזים אינם משתנים. זהו מצב קיבוע, והאלגוריתם נעצר.

6.5 מה מתקבל בנקודת הקיבוע?

בנקודת הקיבוע מתקיימים בו-זמנית שני תנאים אופטימליים מותנים: כל נקודה משויכת למרכז הקרוב ביותר, וכל מרכז הוא ממוצע הנקודות המשויכות אליו. במונחי אופטימיזציה, זהו מינימום ביחס לכל אחד משני בלוקי המשתנים כאשר הבלוק האחר קבוע. מצב כזה נקרא נקודת קיבוע של Lloyd.

$$z_i^* \in \arg \min_k \|x_i - \mu_k^*\|^2, \quad \mu_k^* = \frac{1}{|C_k^*|} \sum_{i \in C_k^*} x_i$$

עם זאת, בעיית K-means הכוללת אינה קמורה. לכן נקודת קיבוע כזו אינה חייבת להיות המינימום הגלובלי של פונקציית המטרה, וייתכנו כמה נקודות קיבוע שונות בהתאם לאתחול.

מסקנת ההתכנסות

ההוכחה בנויה משני רבדים. ראשית, כל אחד משני צעדי Lloyd הוא צעד מזעור מדויק ביחס לבלוק אחד של משתנים, ולכן פונקציית המטרה יורדת מונוטונית. שנית, מרחב ההשמות הוא סופי; ירידה ממשית בכל שינוי השמה מונעת חזרה למצב קודם ומכריחה עצירה סופית. ההבטחה היא לנקודת קיבוע שהיא מינימום מותנה ביחס לכל בלוק, ולא בהכרח למינימום הגלובלי.

הערה על אשכולות ריקים ושווייוני מרחקים

כאשר אשכול נעשה ריק, הממוצע שלו אינו מוגדר, ולכן יש צורך במדיניות מימוש מפורשת. באופן דומה, שוויוני מרחקים דורשים כלל הכרעה. משפט העצירה הסופית לעיל מנוסח תחת הנחות המונעות את הדגנרציות הללו; בהמשך המסמך מופיע סעיף נפרד על טיפול באשכולות ריקים.

6 . דוגמה מספרית מלאה בממד אחד

ניקח את קבוצת הנתונים הבאה ונבחר $K=2$:

$$X = \{1, 2, 4, 10, 11, 12\}, \quad \mu_1^{(0)} = 2, \quad \mu_2^{(0)} = 10$$

שלב ההשמה הראשון נותן $C_1 = \{1, 2, 4\}$ ו- $C_2 = \{10, 11, 12\}$. המרכזים המעודכנים הם:

$$\mu_1^{(1)} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3}, \quad \mu_2^{(1)} = \frac{10+11+12}{3} = 11$$

נקודה	1	2	4	10	11	12
אשכול	1	1	1	2	2	2

פונקציית המטרה לאחר העדכון:

$$J = \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{7}{3}\right)^2 + (10 - 11)^2 + (11 - 11)^2 + (12 - 11)^2$$

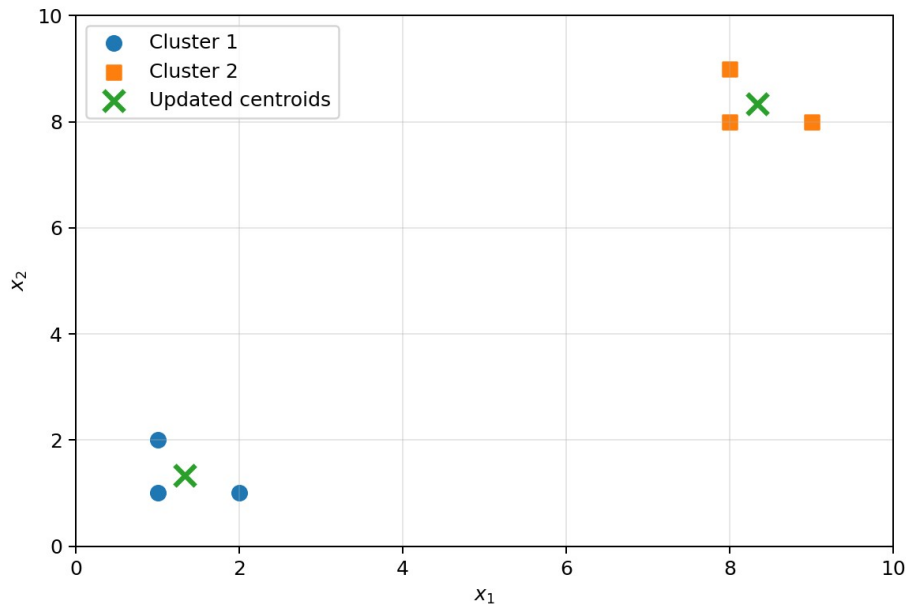
$$J = \frac{20}{3} \approx 6.667$$

באיטרציה הבאה ההשמות נשארות זהות, ולכן זהו פתרון יציב של האלגוריתם עבור האתחול שנבחר.

7 . דוגמה דו-ממדית

ניקח את הנקודות $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(8, 8)$, $(9, 8)$, $(8, 9)$ ונבחר $K=2$. כאשר האתחול הוא $(1, 1)$ ו- $(9, 9)$, מתקבלים שני אשכולות טבעיים. לאחר העדכון:

$$\mu_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad \mu_2 = \left(\frac{25}{3}, \frac{25}{3}\right)$$



איור 1. שתי קבוצות נקודות והמרכזים לאחר עדכון אחד.

שימו לב שהמרכז אינו חייב להיות אחת מן התצפיות המקוריות; הוא יכול להיות כל נקודה במרחב האוקלידי.

8. הפרשנות הגאומטרית: דיאגרמת Voronoi

כאשר משתמשים במרחק האוקלידי, המרכזים מחלקים את המרחב לתאי Voronoi. תא האשכול k הוא קבוצת כל הנקודות שהמרכז μ_k הוא הקרוב אליהן ביותר.

$$V_k = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - \mu_k\| \leq \|x - \mu_j\| \quad \forall j\}$$

הגבול בין שני מרכזים μ_a ו- μ_b מתקבל מהשוואת ריבועי המרחקים. לאחר ביטול האיבר $x^T x$ מתקבלת משוואה ליניארית:

$$2(\mu_b - \mu_a)^T x = \|\mu_b\|^2 - \|\mu_a\|^2$$

לכן הגבול בין כל זוג אשכולות הוא על-מישור. זו אחת הסיבות לכך ש-K-means מתאים במיוחד לאשכולות קומפקטיים ובקירוב כדוריים, ופחות למבנים לא-קמורים.

9. פירוק השונות: WCSS מול שונות בין-אשכולית

נסמן את ממוצע כל הנתונים ב- $\bar{x}$ ואת גודל האשכול k ב- n_k . מתקיימת הזהות:

$$\sum_{i=1}^n \|x_i - \bar{x}\|^2 = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in C_k} \|x_i - \mu_k\|^2 + \sum_{k=1}^K n_k \|\mu_k - \bar{x}\|^2$$

האגף השמאלי קבוע עבור הדאטה. לכן הקטנת WCSS שקולה להגדלת השונות בין המרכזים, BSS. זהו קשר חשוב בין פרשנות גאומטרית לבין פרשנות סטטיסטית של האשכולות.

10. K-means++ אתחול

בחירה אקראית פשוטה של K מרכזים עלולה להציב כמה מרכזים באותו אזור ולגרום לפתרון מקומי גרוע. K-means++ נועד לפרוס את המרכזים הראשוניים באופן טוב יותר.

K-means בלמידת מכונה | מסמך אקדמי
1 . בחר מרכז ראשון באקראי מתוך התצפיות.

2 . לכל נקודה x חשב $D(x)$, המרחק מן המרכז הקרוב ביותר שכבר נבחר.

3 . בחר את המרכז הבא בהסתברות פרופורציונלית ל- $D(x)^2$.

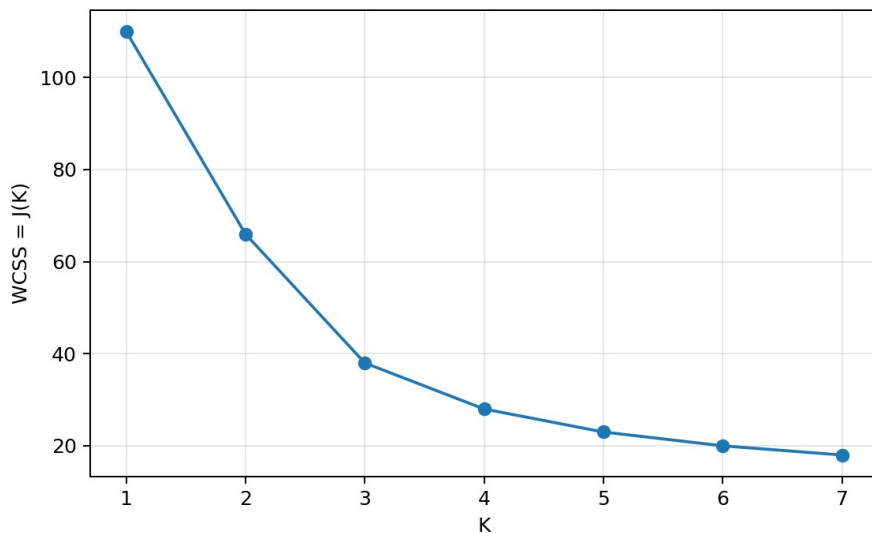
4 . חזור עד שנבחרו K מרכזים, ואז הפעל את K-means הרגיל.

לתהליך האתחול של K-means++ קיימת ערבות תיאורטית: התוחלת של פונקציית המטרה לאחר האתחול חסומה בפקטור מסדר $O(\log K)$ ביחס לפתרון האופטימלי. התוצאה אינה אומרת שהאלגוריתם הסופי יהיה גלובלי, אך מסבירה מדוע האתחול יעיל באופן עקבי בפרקטיקה.

1.1 בחירת מספר האשכולות K

1.1.1 שיטת המרפק

מחשבים את WCSS עבור ערכים עולים של K . מכיוון שהוספת מרכזים אינה יכולה להגדיל את המינימום האפשרי של J , העקומה יורדת. מחפשים נקודה שבה השיפור השולי מתחיל להיות קטן יחסית.



איור 2 . המחשה סכמטית של שיטת המרפק.

1.1.2 מדד Silhouette

לנקודה i נגדיר $a(i)$ כמרחק הממוצע מנקודות באותו אשכול, ו- $b(i)$ כמרחק הממוצע הקטן ביותר לאשכול אחר. אז:

$$s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max\{a(i), b(i)\}}, \quad -1 \leq s(i) \leq 1$$

ערך קרוב ל-1 מעיד על שיוך ברור; ערך סביב 0 מתאים לנקודה סמוכה לגבול; וערך שלילי עשוי להעיד שהנקודה קרובה יותר בממוצע לאשכול אחר.

2.1 השפעת קנה המידה וסטנדרטיזציה

K-means מבוסס על מרחקים ולכן אינו אינווריאנטי לשינוי קנה מידה של תכונה בודדת. אם משתנה אחד נמדד באלפים ומשתנה אחר בטווח 0 - 1, המשתנה הראשון עלול לשלוט בפונקציית המטרה.

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$$

K-means בלמידת מכונה | מסמך אקדמי
זוהי סטנדרטיזציה z-score. לאחריה, לכל תכונה ממוצע 0 וסטיית תקן 1. עם זאת, אין לבצע נרמול באופן אוטומטי: אם היחידות המקוריות משקפות חשיבות מהותית, שינוי קנה המידה משנה את הגאומטריה ואת הבעיה שאנו פותרים.

3. 1. סיבוכיות חישובית

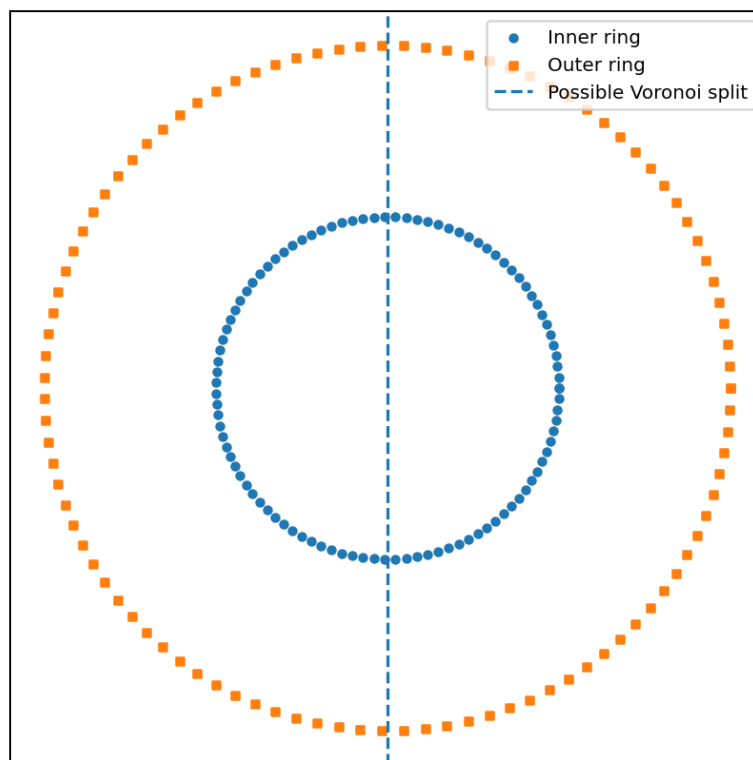
נסמן ב-T את מספר האיטרציות. בכל איטרציה יש לחשב מרחק של n נקודות ל-K מרכזים, וכל מרחק דורש $O(d)$ פעולות. לכן זמן הריצה הטיפוסי הוא:

$$O(nKdT)$$

שלב עדכון המרכזים הוא בקירוב $O(nd)$, ולכן בדרך כלל שלב ההשמה דומיננטי. בזיכרון נדרשים $O(nd)$ לנתונים, $O(Kd)$ למרכזים ו- $O(n)$ להשמות.

4. 1. מתי K-means עלול להיכשל?

- אשכולות לא-קמורים: טבעות, ירחים, שרשראות וצורות מורכבות.
- אשכולות בגדלים או בצפיפויות שונות מאוד.
- נוכחות חריגים: בגלל ריבוע המרחק, נקודות קיצון עשויות להזיז את הממוצע באופן משמעותי.
- משתנים קטגוריאליים, שבהם הממוצע האריתמטי והמרחק האוקלידי אינם טבעיים.
- בחירה לא מתאימה של K או אתחול מקומי גרוע.



ליניארי אינו מפריד ביניהן Voronoi איור 3. שתי טבעות הן שני אשכולות טבעיים, אך חיתוך

5. 1. קשר למודלי תערובת גאוסיאניים (GMM)

קיים קשר בין K-means לבין Gaussian Mixture Models. אם מניחים K התפלגויות גאוסיאניות עם קו-וריאנס משותף מהצורה $\sigma^2 I$, וכאשר ההסתברויות האחוריות נעשות כמעט דטרמיניסטיות, שלב ההשמה של EM מתקרב להשמה הקשיחה של K-means.

K-means בלמידת מכונה | מסמך אקדמי
עם זאת, GMM מחזיר הסתברויות שייכות ולא תווית יחידה, ויכול לתאר אשכולות אליפטיים כאשר מאפשרים מטריצות קו-וריאנס כלליות. לכן הוא מודל הסתברותי עשיר יותר, בעוד K-means הוא אופטימיזציה גאומטרית פשוטה וישירה.

6.1 . אשכולות ריקים

במהלך האלגוריתם ייתכן שאף נקודה לא תשוּיך למרכז מסוים, ולכן C_k ריק והנוסחה לממוצע אינה מוגדרת. מימושים שונים משתמשים במדיניות שונה:

- אתחול מחדש של המרכז לנקודה אקראית.
 - בחירת הנקודה הרחוקה ביותר מן המרכז הקרוב שלה.
 - פיצול אשכול בעל שונות גבוהה.
- בעבודה מדעית או בהשוואת מימושים יש לציין את מדיניות הטיפול באשכול ריק, משום שהיא עשויה להשפיע על התוצאה.

תרגיל

נתונות חמש נקודות חד-ממדיות ושני מרכזים התחלתיים. בצעו את האלגוריתם עד להתכנסות וחשבו את פונקציית המטרה הסופית.

$$X = \{0, 2, 3, 9, 10\}, \quad K = 2, \quad \mu_1^{(0)} = 0, \quad \mu_2^{(0)} = 3$$

איטרציה 1 : הנקודה הקטנה ביותר נשארת באשכול הראשון, וארבע הנקודות האחרות משויכות לאשכול השני. לאחר עדכון הממוצעים מתקבלים המרכזים 0 ו-6.

איטרציה 2 : שלוש הנקודות הקטנות משויכות לאשכול הראשון ושתי הנקודות הגדולות לאשכול השני. מתקבלים:

$$\mu_1 = \frac{0+2+3}{3} = \frac{5}{3}, \quad \mu_2 = \frac{9+10}{2} = 9.5$$

ההשמות אינן משתנות עוד. פונקציית המטרה היא:

$$J = \left(0 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 + (9 - 9.5)^2 + (10 - 9.5)^2$$

$$J = \frac{31}{6} \approx 5.167$$

8 . 1 סיכום

K-means מנסח אשכולות כבעיית מזעור של שונות תוך-אשכולית. שתי הפעולות של האלגוריתם — השמה למרכז הקרוב ועדכון המרכז לממוצע — הן כל אחת אופטימלית כאשר הקבוצה האחרת של המשתנים קבועה. מכאן נובעת ירידה מונוטונית של פונקציית המטרה; תחת הנחות רגילות של אי-ריקות האשכולות וטיפול עקבי בשוויוני מרחקים, סופיות מרחב ההשמות גוררת גם עצירה לאחר מספר סופי של שינויי השמה בנקודת קיבוע של Lloyd.

הצד החזק של K-means הוא הפשטות המתמטית, היעילות החישובית והפרשנות הגאומטרית. הצד המגביל הוא התלות באתחול, ב-K, בקנה המידה ובהנחת המבנה האוקלידי. לכן שימוש אקדמי נכון באלגוריתם צריך לכלול הצדקה של ייצוג הנתונים, בחירת K, אופן האתחול והערכת איכות האשכולות.

מקורות מומלצים

1. MacQueen, J. (1967). Some methods for classification and analysis of multivariate observations. Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.
2. Lloyd, S. P. (1982). Least squares quantization in PCM. IEEE Transactions on Information Theory, 28(2), 129–137. Work originally circulated in 1957.
3. Arthur, D., & Vassilvitskii, S. (2007). k-means++: The advantages of careful seeding. Proceedings of the 18th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms.
4. Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). The Elements of Statistical Learning (2nd ed.). Springer.
5. Bishop, C. M. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.