



יש הסבר נוסף אני עדין יחידים  $x$   
 זה במקרה למעשה!  $(x_1, x_2)$  אפילו זה יחידים  
 יק,  $x_2$

מה שכן היצט שיהיה סך הכולל הממוצע?  
 יצט עצמם למקרה המיוחדים, ישנה סהר קבו  
 יש להם אחרת ויש.

נניח והמקרה הזה בוקרס האם

$$\vec{\mu}_x = \frac{1}{n} \sum x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq$$

בזה למעשה אנו אומרים כי אפילו יש

נניח  $E[x] = 0$  ואם זה לא נכון אז לא נכון  
 נניח.

תהיה מניחה שיש היצט אחר המיוחדים  
 נניח אחרת אחרת אחרת  
 $z_1 = \vec{u} \cdot \vec{x}$

$z_1 = z$  נניח, נניח  
 $E[z] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{u} \cdot \vec{x}_i$

(הוא אחרת)  
 (הוא אחרת)

$$= \vec{u} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) =$$

$\mu = 0$

$$= \vec{u} \cdot \mu \stackrel{!}{=} 0$$

השאלה היא מה יתכן למיני

$$\text{Var}[z] = \frac{1}{n} \sum (z_i - \mu_z)^2 = \frac{1}{n} \sum z_i^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum (\underbrace{\vec{u}}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{\vec{x}_i}_{\text{vektor}})^2 = \frac{1}{n} (\vec{u}^T \cdot \vec{x}_i) (\vec{u}^T \cdot \vec{x}_i)^T$$

$$\text{השאלה היא} \rightarrow \frac{1}{n} \vec{u}^T \cdot \vec{x}_i \cdot \vec{x}_i^T \cdot \vec{u}$$

$$\text{נניח} \quad \text{Var}[z] = \vec{u}^T \cdot \left( \frac{1}{n} \sum \vec{x}_i \cdot \vec{x}_i^T \right) \vec{u} = \vec{u} \cdot \underline{C} \vec{u}^T$$

הקבוצה הזו היא...

הקבוצה הזו היא הקבוצה של כל הווקטורים...

כל הווקטורים שבהם סכום הריבועים של המרכיבים הוא 1. כלומר, הווקטור הזה הוא ווקטור יחיד.

$$\|\vec{u}\| = \vec{u}^T \cdot \vec{u} = 1$$

אם נניח שיש לנו ווקטור, אז הווקטור הזה הוא ווקטור יחיד.

אם נניח שיש לנו ווקטור, אז הווקטור הזה הוא ווקטור יחיד.

הווקטור הזה הוא ווקטור יחיד.

$$\max_{\vec{u}} \text{Var}[z] \quad \text{s.t.} \quad \|\vec{u}\| = 1$$



$$A = X \cdot X^T \Rightarrow A = A^T \quad \text{ז'אזן}$$

$$u^T \cdot A \cdot u = u^T \cdot (X \cdot X^T) \cdot u =$$

$$= (u^T \cdot X) (X^T \cdot u) = (u^T \cdot X)^2 \geq 0$$

ענן שאלה פה

אז (132) ז'אזן לז'אזן ז'אזן ז'אזן ז'אזן ז'אזן

$$z_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{X} \quad \text{ז'אזן פה} \quad z_1 = \vec{u}_1 \cdot \vec{X}$$

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$$

1) ז'אזן  $z_2$  !  $z_1$  ז'אזן ז'אזן ז'אזן ז'אזן ז'אזן ז'אזן

$$\text{Cov}(z_1, z_2) = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] \quad \text{ז'אזן ז'אזן}$$

$$\text{Cov}(z_1, z_2) = \text{Cov}(u_1 \cdot X, u_2 \cdot X) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum (u_1 \cdot X_i) \cdot (u_2 \cdot X_i) - 0$$

ז'אזן ז'אזן

$$= \frac{1}{n} \sum (u_1 \cdot X_i) (u_2 \cdot X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum (u_1^T \cdot X_i) (X_i^T \cdot u_2)$$

$$= \sum u_1^T \left( \frac{1}{n} x_i \cdot x_i^T \right) \cdot u_2 = \sum u_1^T \cdot C \cdot u_2$$

$$= \sum u_1^T (C \cdot u_2) = \sum u_1^T \cdot \lambda u_2$$

אם המטריצה C היא מטריצה סימטרית  
אז  $\lambda$  הוא הערך העigenvalue

$$= \lambda u_1^T \cdot u_2 = 0$$

כלומר  $\lambda = 0$  או  $u_1^T \cdot u_2 = 0$

במקרה  $\lambda = 0$  (כלומר  $C = 0$ )  
אז  $u_1$  ו- $u_2$  הם וקטורים אורתוגונליים.  
(הם אורתוגונליים כל הזמן, גם אם  $\lambda \neq 0$ )  
אם  $\lambda \neq 0$  אז  $u_1$  ו- $u_2$  הם וקטורים אורתוגונליים.

הבעיה המקסימום

$$\max V_{\max}(z_2) \quad \text{s.t.} \quad \|u_1\| = 1, \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

אנחנו רוצים למצוא את  $u_1$  ו- $u_2$  כך ש-

$$l(\vec{u}_2) = u_2^T C u_2 - \lambda (u_1^T \cdot u_2 - 1) - \lambda_2 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$$

אם  $u_1$  ו- $u_2$  הם וקטורים אורתוגונליים  
אז  $u_1^T \cdot u_2 = 0$

אם  $u_1$  ו- $u_2$  הם וקטורים אורתוגונליים

$$u_1 \cdot u_2 = 0$$

$$2C\vec{u}_2 - 2\lambda_1\vec{u}_2 - \lambda_2\vec{u}_1 = 0$$

אם נכנס  $\vec{u}_1$  למשוואה נקבל

$$2\vec{u}_1^T C \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1^T \lambda_1 \vec{u}_2 - \lambda_2 \vec{u}_1^T \cdot \vec{u}_1 = 0$$

המשוואה הזו נכונה לכל  $\vec{u}_1$



$$\lambda_2 \vec{u}_1^T \cdot \vec{u}_1 = 0$$

מכיוון ש  $\|\vec{u}_1\| = 1$  נקבל  $\lambda_2 = 0$

כלומר  $\lambda_2 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{u}_2} = 2C\vec{u}_2 - 2\lambda_1\vec{u}_2 = 0$$



$$C\vec{u}_2 = \lambda_1\vec{u}_2$$

נראה ש  $\lambda_1$  הוא הערך העigen

העigen של  $C$ , היינו רוצים להוכיח ש

$\vec{u}_2$  הוא וקטור העigen של  $C$ , כלומר

$C\vec{u}_2 = \lambda_1\vec{u}_2$  (המשוואה הזו נכונה לכל  $\vec{u}_2$ )

כלומר  $\vec{u}_2$  הוא וקטור העigen של  $C$

כלומר  $\lambda_1$  הוא הערך העigen

כלומר  $\lambda_1$  הוא הערך העigen של  $C$

... א' ב' ח' ט'

ממנו ב' ע' פ' צ' ק' כ' ל' מ' נ' ס' ש' ת' י' י"א י"ב י"ג י"ד י"ה י"ו י"ז י"ח י"ט