

יסודות במתמטיקה ופיזיקה

שיעור 1 - פונקציות טריגונומטריות ווקטורים במישור

3 שעות הרצאה + שעת תרגול | מתמטיקה בלבד

מטרת השיעור: לבנות מן היסוד את מושגי הסינוס והקוסינוס, לעבור מן המשולש למעגל היחידה, ולאחר מכן להשתמש בכלים אלה כדי לפתח אלגברה וקטורית במישור. כל סעיף מוצג כשאלה ולאחריה פתרון מלא.

תוכן	חלק
פונקציות, משולשים דומים, סינוס וקוסינוס	שעת הרצאה 1
מעגל היחידה, רדיאנים וגרפים	שעת הרצאה 2
וקטורים, מכפלה סקלרית והיטל	שעת הרצאה 3
תרגילים מדורגים עד רמה אקדמית	שעת תרגול

שעת הרצאה 1 - מהי פונקציה, ומאיפה הגיעו סינוס וקוסינוס?

שאלה 1 : מהי פונקציה?

פתרון:

פונקציה היא כלל המתאים לכל קלט בתחום ההגדרה פלט יחיד. נסמן פונקציה כך:

$$f : A \rightarrow B$$

לדוגמה, אם $f(x)=x^2$ אז $f(3)=9$. חשוב להדגיש: גם זווית יכולה להיות קלט של פונקציה.

בהמשך נגדיר את $\theta \mapsto \cos \theta$ ואת $\theta \mapsto \sin \theta$.

שאלה 2 : מדוע היחס בין ניצב ליתר יכול להגדיר פונקציה של זווית?

פתרון:

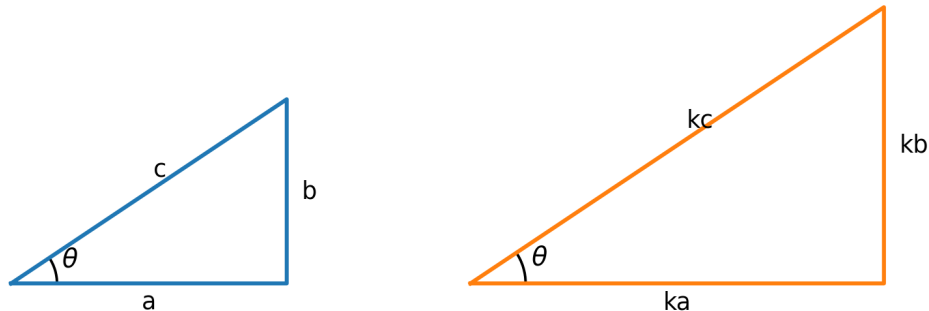
ניקח שני משולשים ישרי-זווית בעלי אותה זווית θ . משום שהמשולשים דומים, כל הצלעות במשולש השני מתקבלות

מכפל בקבוע k . לכן:

$$(ka)/(kc) = a/c \quad (k > 0, c > 0)$$

כלומר היחס בין הניצב הצמוד לזווית ובין היתר אינו תלוי בגודל המשולש, אלא רק בזווית θ . באותה דרך גם היחס

בין הניצב שמול הזווית ובין היתר קבוע.



ציור 1 : משולשים דומים בעלי אותה זווית θ .

שיעור 1 - יסודות במתמטיקה ופיזיקה

שאלה 3 : כיצד מגדירים את הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר-זווית?

פתרון:

$$\cos \theta = (\text{יתר})/(\text{ניצב צמוד})$$

$$\sin \theta = (\text{יתר})/(\text{ניצב מול})$$

$$\tan \theta = (\text{ניצב צמוד})/(\text{ניצב מול}) = \sin \theta / \cos \theta$$

המסקנה החשובה: סינוס וקוסינוס אינם רק יחסים בתוך משולש; הם פונקציות שהקלט שלהן הוא זווית והפלט שלהן הוא מספר.

שאלה 4 : מהו משולש מיוחד, וכיצד הוא מאפשר לחשב ערכים טריגונומטריים מדויקים?

פתרון:

משולש מיוחד הוא משולש ישר-זווית שבו הזוויות קבועות וידועות, ולכן גם היחסים בין אורכי הצלעות קבועים. בטריגונומטריה משתמשים בעיקר בשני משולשים מיוחדים:

$$45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$$

$$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$$

המשולש הראשון הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים. אם שני הניצבים באורך 1, ממשפט פיתגורס מתקבל:

$$c = \sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{2}$$

לכן יחס הצלעות במשולש זה הוא:

$$1 : 1 : \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$$

המשולש השני מתקבל מחציית משולש שווה-צלעות שאורך כל צלע בו 2. הגובה חוצה את הבסיס, ולכן חצי הבסיס הוא 1. אם נסמן את הגובה ב-h, ממשפט פיתגורס:

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

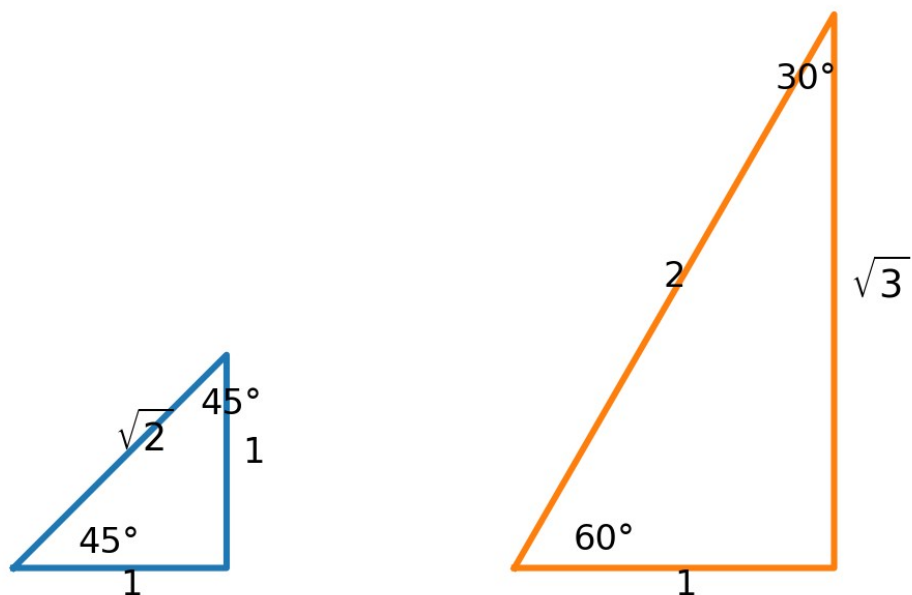
לכן יחס הצלעות במשולש זה הוא:

$$1 : \sqrt{3} : 2$$

מכאן מתקבלים הערכים המדויקים בלי שינון:

$$\sin 30^\circ = 1/2, \quad \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2, \quad \cos 60^\circ = 1/2$$



ציור 2 : שני המשולשים המיוחדים והיחסים הקבועים בין צלעותיהם.

שאלה 5 : דוגמה: כיצד מוצאים את שני הניצבים כאשר נתונים היתר והזווית?

$$c = 10, \quad \theta = 35^\circ$$

פתרון: נסמן ב- x את הניצב הצמוד וב- y את הניצב שמול הזווית.

$$x = 10 \cos 35^\circ \approx 8.19$$

$$y = 10 \sin 35^\circ \approx 5.74$$

בדיקה: לפני העיגול $x^2 + y^2 = 100$, כפי שנדרש ממשפט פיתגורס.

שעת הרצאה 2 - מעגל היחידה, רדיאנים וגרפים טריגונומטריים

שאלה 6 : מדוע ההגדרה באמצעות משולש ישר-זווית אינה מספיקה?

פתרון:

במשולש ישר-זווית שתי הזוויות החדות קטנות מ- 90° . לכן ההגדרה הראשונית אינה מסבירה, למשל, מהו

$\cos 120^\circ$. כדי להגדיר סינוס וקוסינוס לכל זווית עוברים למעגל היחידה.

שאלה 7 : כיצד מגדירים **sin** ו-**cos** באמצעות מעגל היחידה?

פתרון:

מעגל היחידה הוא המעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 :

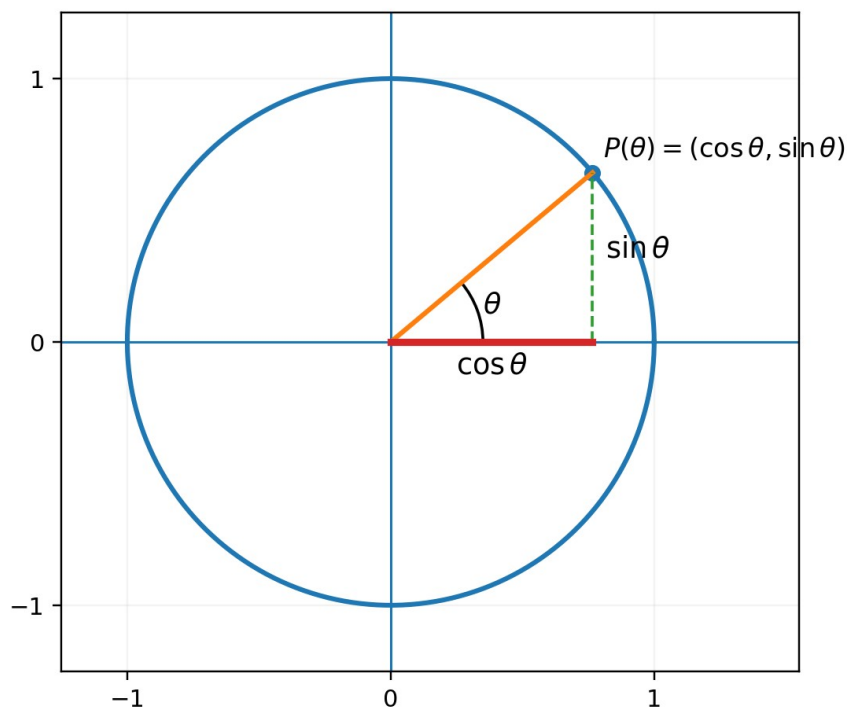
$$x^2 + y^2 = 1$$

אם P מתקבלת מסיבוב בזווית θ מציר x החיובי (זווית חיובית נגד כיוון השעון), נגדיר:

$$P(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

לכן $\cos \theta$ הוא הקואורדינטה האופקית של הנקודה ו- $\sin \theta$ הוא הקואורדינטה האנכית שלה.

שיעור 1 - יסודות במתמטיקה ופיזיקה



ציור 3 : מעגל היחידה והמשמעות הגיאומטרית של הקואורדינטות.

שאלה 8 : כיצד מוכיחים את הזהות הטריגונומטרית היסודית?

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

פתרון:

הנקודה $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ נמצאת על מעגל היחידה ולכן היא מקיימת את משוואת המעגל $x^2 + y^2 = 1$. הצבה נותנת מיד:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

שאלה 9: כיצד מחשבים ערכי סינוס וקוסינוס בזווית הנמצאת ברביע השני?

$$\theta = 120^\circ$$

פתרון:

הזווית 120° נמצאת ברביע השני. זווית הייחוס היא 60° . ברביע השני קואורדינטת x שלילית וקואורדינטת y חיובית, ולכן:

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

שאלה 10 : מהו רדיוס, ומדוע הוא הגדרה טבעית לזווית?

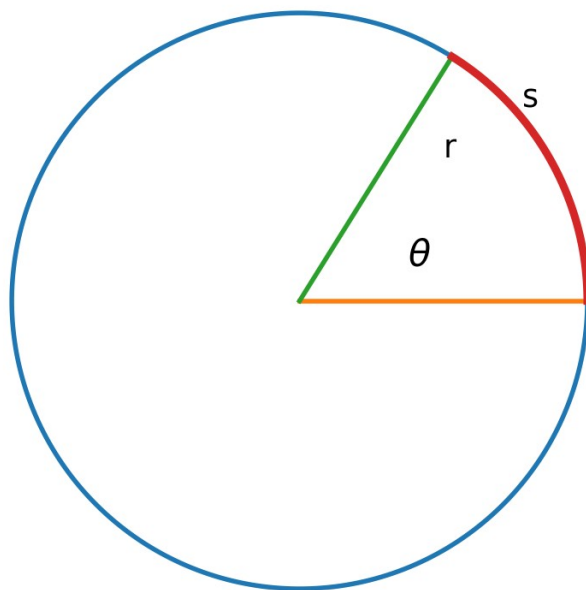
פתרון:

אם זווית מרכזית θ חותכת קשת באורך s במעגל שרדיוסו r, מגדירים את הזווית ברדיאנים על ידי:

$$\theta = s/r$$

כאשר אורך הקשת שווה לרדיוס, הזווית היא 1 רדיוס. מאחר שהיקף מעגל הוא $2\pi r$, סיבוב מלא הוא 2π רדיאנים.

$$360^\circ = 2\pi, \quad 180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \pi/2$$



$$\theta = s/r$$

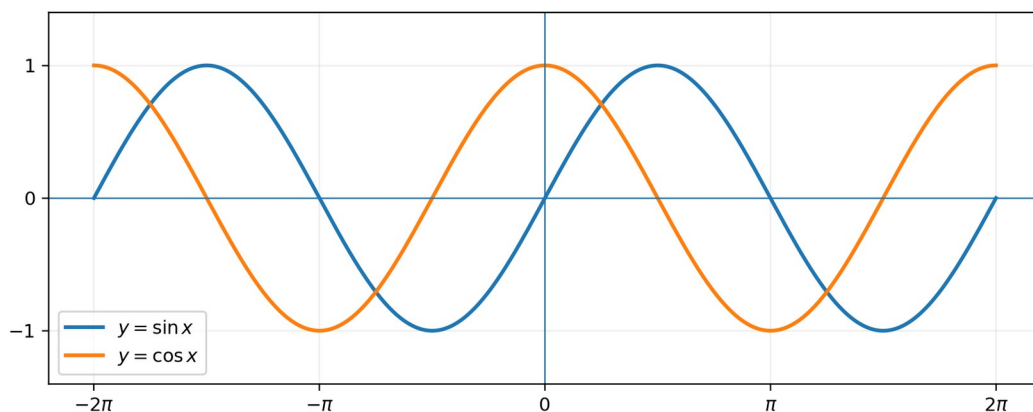
ציור 4 : הגדרת רדיאן באמצעות אורך קשת.

שאלה 1 1 : כיצד נראים הגרפים של פונקציות הסינוס והקוסינוס?

$$y = \sin x, \quad y = \cos x$$

פתרון:

כאשר הנקודה נעה על מעגל היחידה, הקואורדינטות שלה משתנות מחזורית. הקואורדינטה האנכית יוצרת את גרף הסינוס, והאופקית את גרף הקוסינוס. לשתייהן מחזור 2π (ברדיאנים) וערכים בין -1 ל- 1 .



ציור 5 : הגרפים הבסיסיים של הפונקציות הטריגונומטריות.

שעת הרצאה 3 - וקטורים במישור

שאלה 2 1 : מהו וקטור במישור?

שיעור 1 - יסודות במתמטיקה ופיזיקה

פתרון:

וקטור במישור הוא זוג סדור של מספרים. נסמן:

$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$

אפשר לייצג אותו כחץ מן הראשית לנקודה (v_1, v_2) . בשלב זה הווקטור הוא אובייקט מתמטי בלבד.

שאלה 3 1 : כיצד מחשבים אורך של וקטור, וכיצד מייצרים ממנו וקטור יחידה?

פתרון:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

לדוגמה, עבור $v=(3,4)$:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

כאשר $\vec{v} \neq 0$, וקטור היחידה בכיוון $\vec{v}$ מתקבל בחלוקה באורך:

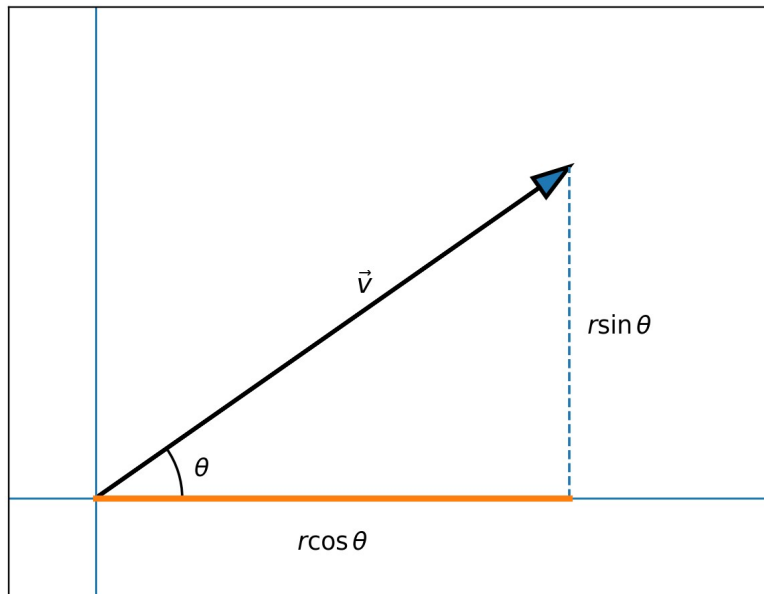
$$\hat{v} = \vec{v} / \|\vec{v}\| = (3/5, 4/5)$$

שאלה 4 1 : כיצד עוברים מגודל וכיוון לרכיבים קרטזיים?

פתרון:

אם אורך הווקטור הוא r וזוויתו מציר x החיובי היא θ , מהגדרת סינוס וקוסינוס מתקבל:

$$\vec{v} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



ציור 6 : פירוק וקטור לרכיבים אופקי ואנכי.

בכיוון ההפוך, אם $\vec{v}=(x,y)$ אינו וקטור האפס, אז:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = y/x \quad (x \neq 0)$$

יש לבדוק את הרביע. כאשר $x=0$ הכיוון אנכי; לווקטור האפס אין כיוון.

בחישוב ממוחשב משתמשים ב־ $\text{atan2}(y,x)$, המתחשבת בסימני שני הרכיבים.

שאלה 5 1 : כיצד מחברים וקטורים וכופלים וקטור בסקלר?

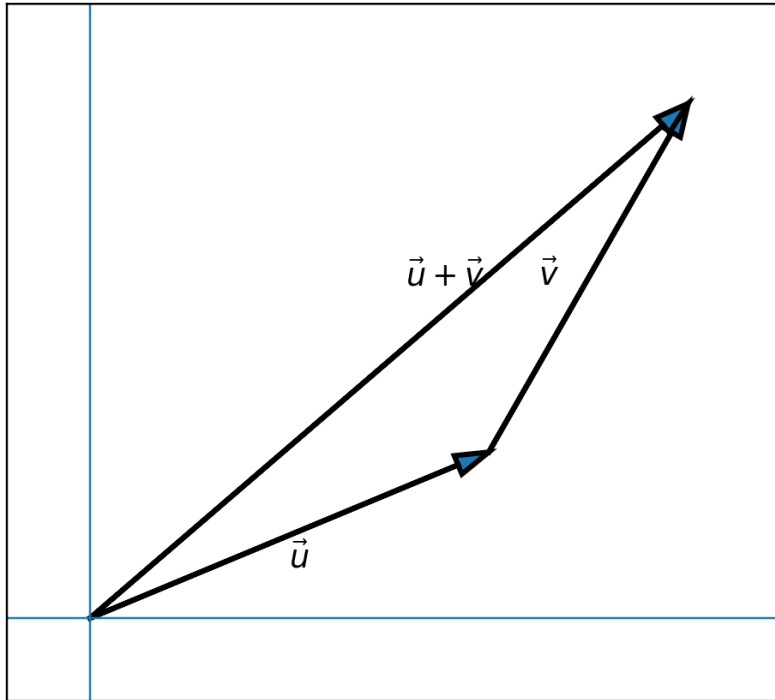
שיעור 1 - יסודות במתמטיקה ופיזיקה

פתרון:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$\lambda \vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

החיבור הגיאומטרי מתקבל בשיטת ראש-לזנב: מציבים את תחילת $\vec{v}$ בקצה $\vec{u}$.
הווקטור מן ההתחלה אל הסוף הוא $\vec{u} + \vec{v}$.



ציור 7 : חיבור וקטורים בשיטת ראש-לזנב.

שאלה 6 1 : מהי מכפלה סקלרית, וכיצד היא קשורה לזווית בין שני וקטורים?
פתרון:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

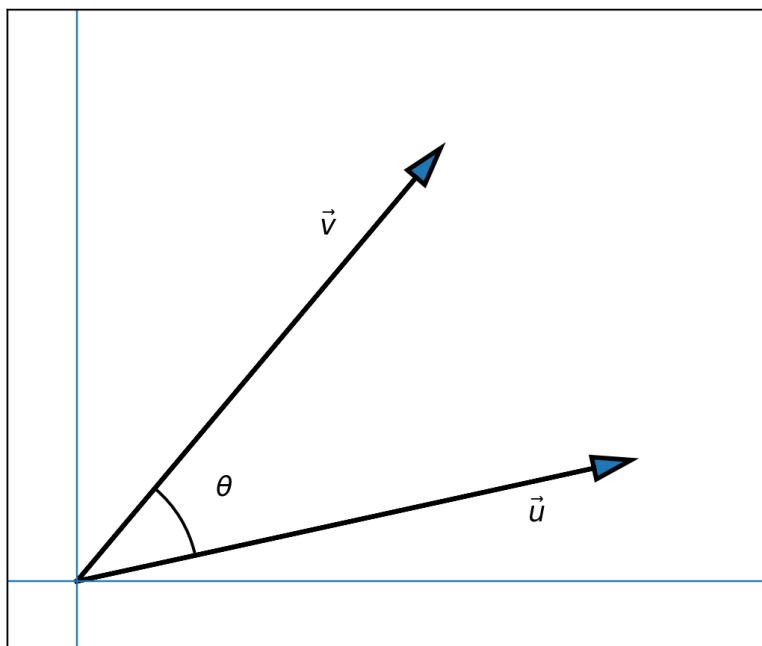
אפשר להראות שהמכפלה הסקלרית מקיימת גם:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

ולכן, עבור וקטורים שאינם אפס:

$$\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|)$$

המכפלה הסקלרית היא מספר, ולא וקטור. הזווית בין וקטורים נבחרת בתחום $0 \leq \theta \leq \pi$.
הסימון $\arccos$ מציין את הפעולה ההפוכה לקוסינוס בתחום זה; משתמשים בה למציאת הזווית.



ציור 8 : הזווית בין שני וקטורים.

בפרט, עבור וקטורים שאינם אפס: $\vec{v} \perp \vec{u}$ אם ורק אם $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.

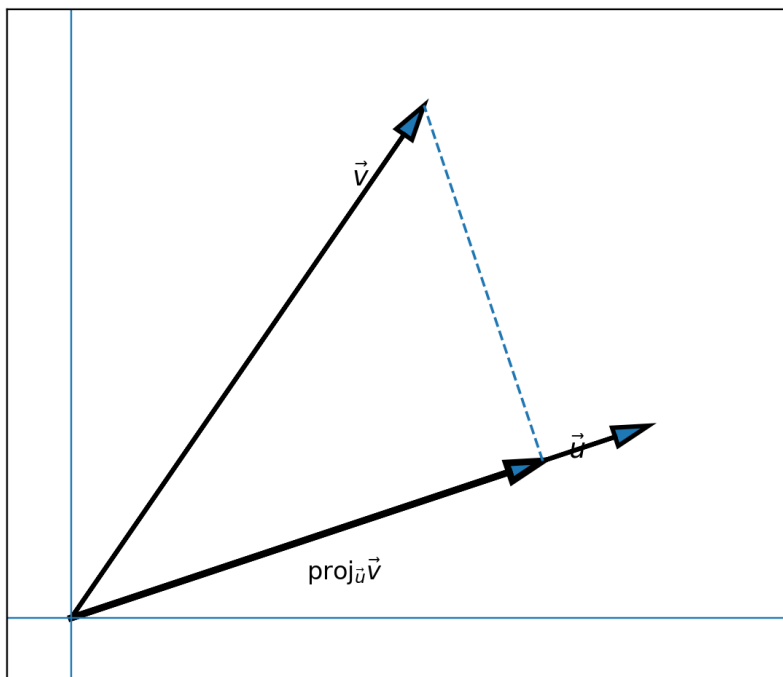
שאלה 7 1 : כיצד מפרקים וקטור לרכיב מקביל ולרכיב מאונך לווקטור נתון?
פתרון:

עבור $\vec{u} \neq 0$, ההיטל של $\vec{v}$ על הכיוון של $\vec{u}$ הוא:

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = ((\vec{v} \cdot \vec{u}) / (\|\vec{u}\|^2)) \vec{u}$$

זהו הרכיב של $\vec{v}$ המקביל ל- $\vec{u}$. הרכיב המאונך הוא:

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$$



ציור 9: היטל של וקטור על כיוון נתון.

שעת תרגול - תרגילים מדורגים

התרגילים הבאים נפתרים מיד לאחר הצגתם. רמת הקושי עולה בהדרגה, והתרגילים האחרונים הם ברמת פתיחה אקדמית.

שאלה ת 1 : חשב את הערכים המדויקים הבאים.

$$\sin(\pi/3), \quad \cos(5\pi/6), \quad \tan(3\pi/4)$$

פתרון:

$$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$$

$$\cos(5\pi/6) = \cos(150^\circ) = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan(3\pi/4) = \tan(135^\circ) = -1$$

שאלה ת 2 : פתור את המשוואה בתחום הנתון.

$$\cos x = -1/2$$

$$0 \leq x < 2\pi$$

פתרון:

הקואורדינטה האופקית היא $-1/2$ – ברביעים השני והשלישי, וזווית הייחוס היא $\pi/3$. לכן:

$$x = 2\pi/3 \quad \text{or} \quad x = 4\pi/3$$

שאלה ת 3 : נתונים שני וקטורים. חשב את הסכום, צירוף ליניארי ואת נורמת הווקטור הראשון.

$$\vec{u} = (3, -2), \quad \vec{v} = (-1, 4)$$

$$\vec{u} + \vec{v}, \quad 2\vec{u} - 3\vec{v}, \quad \|\vec{u}\|$$

פתרון:

שיעור 1 - יסודות במתמטיקה ופיזיקה

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 2)$$

$$2\vec{u} - 3\vec{v} = (6, -4) - (-3, 12) = (9, -16)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$$

שאלה ת 4 : כתוב ברכיבים וקטור כאשר נתונים אורכו וכיוונו.

$$\|\vec{v}\| = 6, \quad \theta = 2\pi/3$$

פתרון:

$$\vec{v} = (6 \cos(2\pi/3), 6 \sin(2\pi/3))$$

$$\vec{v} = (-3, 3\sqrt{3})$$

שאלה ת 5 : נתונים שני וקטורים. מצא את הזווית ביניהם.

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (-1, 3)$$

פתרון:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(-1) + 1(3) = 1$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = 1/\sqrt{50}$$

$$\theta = \arccos(1/\sqrt{50}) \approx 81.87^\circ$$

שאלה ת 6 : הוכח את הזהות הבאה עבור שני וקטורי יחידה.

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

פתרון:

נפתח את ריבוע הנורמה באמצעות המכפלה הסקלרית:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

מאחר ש $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, מתקיים $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{v} = 1$. לכן:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

זהו תרגיל חשוב: הוא מחבר בין מרחק אלגברי לבין הזווית בין וקטורי יחידה.

שאלה ת 7 - רמה אקדמית: פרק וקטור לרכיב המקביל לווקטור נתון ולרכיב המאונך לו.

$$\vec{u} = (1, 2), \quad \vec{v} = (4, -1)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \quad \vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{u}, \quad \vec{v}_{\perp} \perp \vec{u}$$

פתרון:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 2$$

$$\|\vec{u}\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\vec{v}_{\parallel} = \text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = (2/5)(1, 2) = (2/5, 4/5)$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = (4, -1) - (2/5, 4/5) = (18/5, -9/5)$$

בדיקה:

$$\vec{v} \perp \vec{u} = (18/5) \cdot 1 + (-9/5) \cdot 2 = 0$$

שאלה ת 8 - רמה אקדמית: נתונים שני וקטורי יחידה שהזווית ביניהם היא θ . הוכח את הקשר הבא.

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = 2 \cos(\theta/2)$$

פתרון:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= 1 + 1 + 2\cos \theta = 2(1 + \cos \theta)$$

נשתמש בזהות הבאה (נתונה לתרגיל): $1 + \cos \theta = 2\cos^2(\theta/2)$.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 4\cos^2(\theta/2)$$

מאחר ש- $0 \leq \theta \leq \pi$, מתקיים $0 \leq \theta/2 \leq \pi/2$ ולכן $\cos(\theta/2) \geq 0$. מכאן:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = 2 \cos(\theta/2)$$

זהו תרגיל אקדמי מלא: הוא משלב נורמה, מכפלה סקלרית וזהות טריגונומטרית בהוכחה אחת.

סיכום ותוצאות למידה לשבוע 1

- להסביר מדוע $\sin$ ו- $\cos$ מוגדרים היטב באמצעות דמיון משולשים.
- לעבור מהגדרת המשולש להגדרת מעגל היחידה ולחשב ערכים בכל ארבעת הרביעים.
- להשתמש ברדיאנים ולהמיר בין רדיאנים למעלות.
- לייצג וקטור במישור, לחשב נורמה, לחבר וקטורים ולכפול בסקלר.
- לעבור בין ייצוג של גודל וכיוון לבין רכיבים קרטזיים.
- להשתמש במכפלה הסקלרית למציאת זווית, מאונכות והיטל.
- לפתור תרגילי וקטורים ברמת פתיחה אקדמית מבלי להשתמש עדיין במושגים פיזיקליים.

עדכון לסילבוס - שבוע 1

שבוע 1 - יסודות טריגונומטריים ואלגברה וקטורית במישור: מושג הפונקציה; מקור פונקציות הסינוס והקוסינוס מדמיון משולשים; **sin, cos, tan**; מעגל היחידה; רדיאנים; הזהות $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; גרפים בסיסיים; וקטורים במישור; חיבור וכפל בסקלר; נורמה ווקטור יחידה; מעבר בין גודל וכיוון לרכיבים; מכפלה סקלרית; זווית בין וקטורים; מאונכות והיטל.

עיקרון פדגוגי: בשבוע הראשון נלמדת מתמטיקה בלבד. לא נעשה שימוש בגדלים או במושגים פיזיקליים לפני שהוגדרו.