

עצי שטיינר, עצים פורשים מינימליים, ואלגוריתם קירוב

מסמך מתוקן עם דוגמאות מלוות ושרטוטים

במסמך זה נבנה בהדרגה את הרקע הדרוש להבנת בעיית Steiner Tree: תחילה נגדיר עץ פורש מינימלי, אחר כך נגדיר עץ שטיינר, נשווה ביניהם בדוגמאות, ולבסוף נציג אלגוריתם קירוב קלאסי לבעיית עץ שטיינר בגרף ממושקל. הדגש הוא על הבנת הבנייה של הסגור המטרי, שלב החלפת הקשתות הווירטואליות, והוכחת החסם

$$ALG \leq 2 OPT.$$

1 מבוא לגרפים ממושקלים

נניח שנתון גרף ממושקל

$$G = (V, E, w),$$

כאשר V היא קבוצת הקודקודים, E היא קבוצת הקשתות, ו- $w(e)$ הוא המשקל של הקשת e . בדרך כלל נחשוב על המשקל כעל אורך, מחיר, זמן, או עלות חיבור.

אם $u, v \in V$ נסמן ב-

$$\text{dist}_G(u, v)$$

את אורך המסלול הקצר ביותר מ- u ל- v בגרף המקורי G .

2 עץ פורש מינימלי - MST

עץ פורש של גרף קשיר הוא תת-גרף שמחבר את כל הקודקודים של הגרף, ואינו מכיל מעגלים. במילים אחרות, עץ פורש הוא עץ שמגיע לכל קודקוד.

עץ פורש מינימלי, או Minimum Spanning Tree, הוא עץ פורש שעלות הקשתות שלו מינימלית:

$$\text{MST}(G) = \min_T \sum_{e \in T} w(e),$$

כאשר T עובר על כל העצים הפורשים של G .

דוגמה קצרה ל-MST

נניח שיש ארבעה קודקודים A, B, C, D וקשתות במשקלים שונים. עץ פורש חייב לחבר את כולם, ולכן עבור ארבעה קודקודים יהיו בו בדיוק שלוש קשתות. אלגוריתמים כמו קרוסקל או פריים יודעים למצוא בזמן יעיל את העץ הפורש המינימלי.

3 עץ שטיינר - Steiner Tree

בבעיית עץ שטיינר לא חייבים לחבר את כל הקודקודים בגרף. במקום זאת, נתונה קבוצת קודקודים מיוחדת

$$R \subseteq V,$$

שנקראת קבוצת הטרמינלים. אלה הקודקודים שחייבים לחבר.

מותר להשתמש גם בקודקודים שאינם טרמינלים. קודקודים אלה נקראים **קודקודי שטיינר**. לכן עץ

שטיינר הוא עץ שמחבר את כל הטרמינלים, אך רשאי לעבור גם דרך קודקודים נוספים.

אם T^* הוא עץ שטיינר אופטימלי, נסמן

$$\text{OPT} = w(T^*).$$

ההבדל העיקרי בין MST לעץ שטיינר

ב-MST מחברים את כל הקודקודים הנתונים. לעומת זאת, בעץ שטיינר מחברים רק את הטרמינלים, אך מותר להשתמש בקודקודי עזר. לכן עץ שטיינר יכול להיות קצר יותר מעץ פורש מינימלי על הטרמינלים בלבד.

4 דוגמה: משולש שווה-צלעות

ניקח שלושה טרמינלים A, B, C שהם קודקודים של משולש שווה-צלעות שאורך כל צלע בו הוא 6. אם משתמשים רק בטרמינלים, עץ פורש מינימלי בוחר שתי צלעות, ולכן

$$\text{MST} = 6 + 6 = 12.$$

לעומת זאת, בעץ שטיינר מותר להוסיף נקודת שטיינר S בתוך המשולש. במקרה של משולש שווה-צלעות, נקודת שטיינר אופטימלית מחברת את שלושת הקודקודים בזוויות של 120° . אורך כל זרוע הוא

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

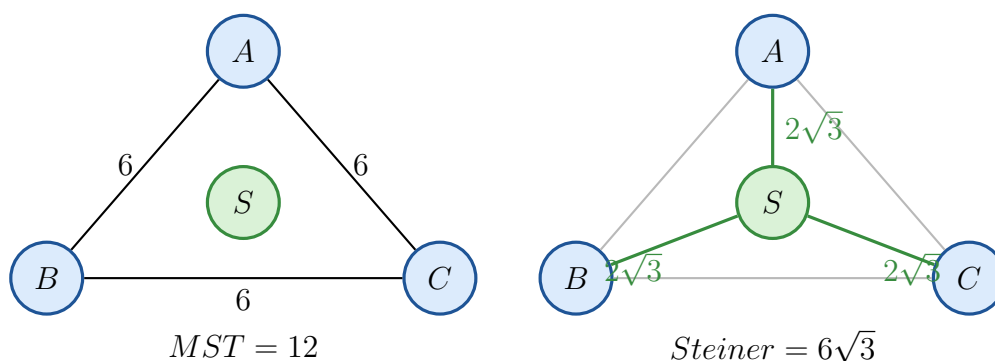
ולכן

$$\text{Steiner} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10.392.$$

קיבלנו

$$6\sqrt{3} < 12,$$

ולכן עץ שטיינר קצר יותר מה-MST.



5 אלגוריתם קירוב קלאסי לעץ שטיינר בגרף

נניח שנתון גרף ממושקל $G = (V, E, w)$ וקבוצת טרמינלים $R \subseteq V$. האלגוריתם הפשוט הוא:

1. מחשבים את המרחק הקצר ביותר $\text{dist}_G(u, v)$ בין כל זוג טרמינלים $u, v \in R$.
2. בונים גרף מלא K_R על הטרמינלים בלבד. עבור כל זוג $u, v \in R$ מגדירים את משקל הקשת הווירטואלית (u, v) להיות

$$w_{K_R}(u, v) = \text{dist}_G(u, v).$$

זהו הסגור המטרי על הטרמינלים.

3. מחשבים MST על K_R . נסמן אותו ב- M .

4. כל קשת (u, v) ב- M מוחלפת במסלול הקצר ביותר בין u ל- v בגרף המקורי G .

5. אם נוצרו מעגלים, מוחקים קשתות מתוך מעגלים עד שמתקבל עץ. מחיקה כזו אינה מגדילה את העלות.

6 דוגמה מלווה מפורטת לאלגוריתם

כעת נבנה דוגמה שבה רואים במפורש את שלב ההחלפה של קשת וירטואלית במסלול בגרף המקורי.

6.1 הגרף המקורי

נגדיר גרף ממושקל

$$G = (V, E, w)$$

עם קבוצת קודקודים

$$V = \{A, B, C, S\}.$$

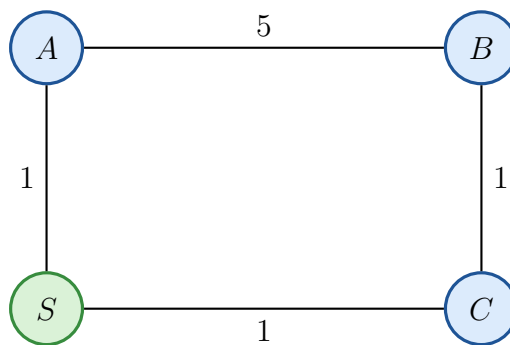
הטרמינלים הם

$$R = \{A, B, C\},$$

והקודקוד S הוא קודקוד שטיינר. הקשתות הן

$$A - S = 1, \quad S - C = 1, \quad C - B = 1, \quad A - B = 5.$$

אין קשת ישירה בין A ל- C .



6.2 בניית הסגור המטרי

כעת בונים גרף מלא על הטרמינלים בלבד: A, B, C . המשקל של כל קשת מוגדר לפי המרחק הקצר ביותר בגרף המקורי. נחשב:

$$\text{dist}_G(A, C) = 2,$$

כי המסלול הקצר ביותר הוא

$$A \rightarrow S \rightarrow C.$$

כמו כן,

$$\text{dist}_G(C, B) = 1,$$

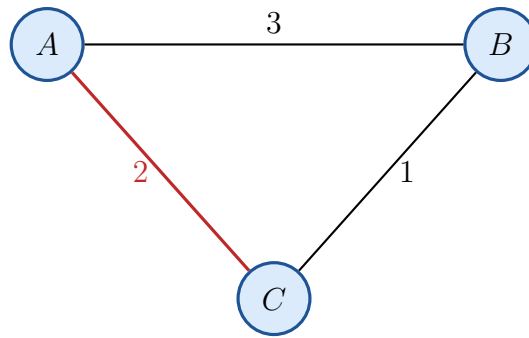
כי קיימת קשת ישירה $C - B$, וכן

$$\text{dist}_G(A, B) = 3,$$

כי המסלול הקצר ביותר הוא

$$A \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow B,$$

בעלות $1 + 1 + 1 = 3$, ולא הקשת הישירה $A - B$ שעלותה 5.



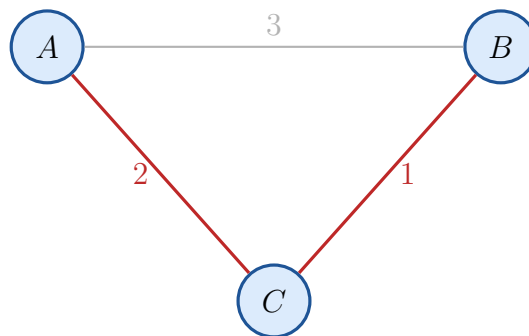
6.3 חישוב MST על הסגור המטרי

בגרף המלא על הטרמינלים המשקלים הם

$$AC = 2, \quad CB = 1, \quad AB = 3.$$

לכן ה-MST בוחר את הקשתות הזולות CB ו- AC . העלות היא

$$1 + 2 = 3.$$



6.4 שלב ההחלפה בגרף המקורי

כעת מחזירים את הקשתות שבחרנו לגרף המקורי. הקשת CB קיימת בגרף המקורי ולכן נשארת כפי שהיא. לעומת זאת, הקשת AC אינה קיימת בגרף המקורי, ולכן מחליפים אותה במסלול הקצר ביותר

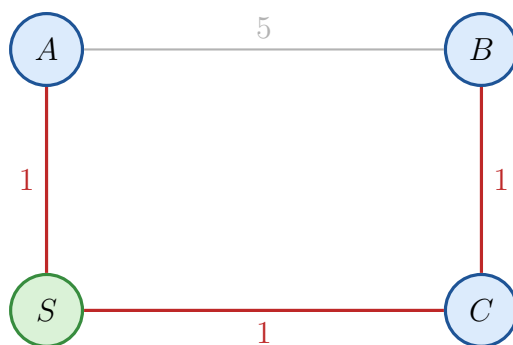
$$A \rightarrow S \rightarrow C.$$

לכן הפלט בגרף המקורי הוא

$$A - S, \quad S - C, \quad C - B,$$

בעלות

$$\text{ALG} = 1 + 1 + 1 = 3.$$



7 הוכחת חסם הקירוב

נוכיח שהאלגוריתם מחזיר פתרון שעלותה לכל היותר פי 2 מן האופטימום:

$$\text{ALG} \leq 2 \text{OPT}.$$

יהי T^* עץ שטיינר אופטימלי המחבר את כל הטרמינלים, ועלותו OPT .

7.1 מה פירוש ``נכפיל כל קשת''?

כאשר אומרים שנכפיל כל קשת ב- T^* , הכוונה היא שכל קשת בעץ תיספר פעמיים: פעם אחת בכיוון אחד ופעם אחת בכיוון ההפוך. באופן אינטואיטיבי, נלך על כל קשת הלוך וחזור. לדוגמה, אם בעץ יש מסלול

$$A - S - B$$

עם משקלים 3 ו-4, אז העלות של העץ היא

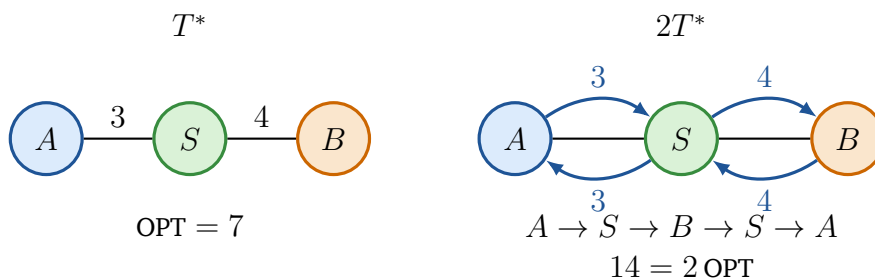
$$\text{OPT} = 3 + 4 = 7.$$

לאחר הכפלת הקשתות נוכל ללכת

$$A \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow A,$$

והעלות תהיה

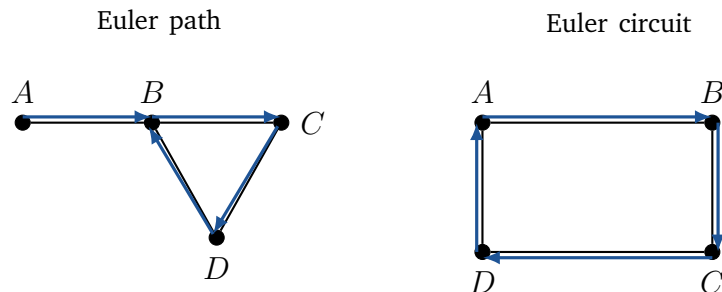
$$3 + 4 + 4 + 3 = 14 = 2 \text{OPT}.$$



7.2 למה מתקבל מעגל אוילר?

משפט אוילר: בגרף לא־מכוון וקשיר קיים מעגל אוילר אם ורק אם כל הקודקודים הם מדרגה זוגית.

כיוון ש- T^* הוא עץ, ייתכן שיש בו קודקודים מדרגה אי-זוגית. אבל לאחר שמכפילים כל קשת, כל דרגה מוכפלת ולכן נעשית זוגית. לכן בגרף החדש קיים מעגל אוילר: מסלול סגור שעובר בכל עותק של כל קשת בדיוק פעם אחת. חשוב לדיוק: **מסלול אוילר** עובר בכל קשת בדיוק פעם אחת, אך אינו חייב להתחיל ולהסתיים באותו קודקוד. לעומת זאת, **מעגל אוילר** הוא מסלול אוילר סגור, ולכן הוא כן מתחיל ומסתיים באותו קודקוד.



7.3 מסיום ההוכחה

מעגל האוילר בגרף המוכפל הוא סיור סגור בעלות $2 \cdot \text{OPT}$. הסיור הזה מבקר בכל הטרמינלים, ואולי גם בקודקודי שטיינר כמה פעמים.

כעת מקצרים את הסיור: בכל פעם שהסיור עובר דרך קודקודי שטיינר או חוזר לטרמינל שכבר ביקרנו בו, אפשר לדלג קדימה לטרמינל הבא. בגלל אי-שוויון המשולש בסגור המטרי, קיצור כזה אינו מגדיל את העלות.

לכן מתקבל סיור על הטרמינלים בלבד בעלות לכל היותר $2 \cdot \text{OPT}$. מתוך סיור סגור על כל הטרמינלים אפשר למחוק קשת אחת ולקבל עץ פורש על הטרמינלים, ועדיין העלות לא גדלה. לכן קיים עץ פורש על הטרמינלים בעלות לכל היותר $2 \cdot \text{OPT}$.

מכיוון שה-MST על הסגור המטרי הוא העץ הפורש המינימלי על הטרמינלים, נקבל

$$w(M) \leq 2 \cdot \text{OPT}.$$

כאשר מחליפים את קשתות M במסלולים הקצרים ביותר בגרף המקורי, העלות אינה משתנה, כי כך בדיוק הוגדרו משקלי הקשתות בסגור המטרי. ואם נוצרים מעגלים, מחיקתם אינה מגדילה את העלות. לכן

$$\text{ALG} \leq w(M) \leq 2 \cdot \text{OPT}.$$

זה מוכיח שהאלגוריתם הוא אלגוריתם קירוב ביחס 2.