

התבנית היסודית השנייה, עקמומיות גאוס ועקמומיות נורמלית

מבוא גאומטרי ושימושי עם תרגיל מסכם: שתי מכוניות על גשר קמור

מטרת המסמך היא לתת משמעות גאומטרית לתבנית היסודית השנייה, ולא רק להציג את הנוסחאות שלה. נרצה להבין כיצד היא מודדת את כיפוף המשטח, כיצד היא קשורה לאופרטור הצורה ולעקמומיות גאוס, מהי עקמומיות נורמלית, ולבסוף כיצד כל המושגים האלה נכנסים לדוגמה שימושית של שתי מכוניות הנעות על כביש מעוקם.

1. מה חסר אחרי התבנית היסודית הראשונה?

למשטח פרמטרי $X(u, v)$, התבנית היסודית הראשונה מודדת גדלים פנימיים על המשטח: אורכים, זוויות, שטחים ומרחקים. היא נכתבת

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

כאשר

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

אולם התבנית הראשונה אינה מתארת ישירות כיצד המשטח מתכופף בתוך המרחב התלת-ממדי. למשל, גליל ניתן לפריסה למישור ללא מתיחה מקומית. לכן מבחינת מדידת אורכים וזוויות הם יכולים להיראות זהים מקומית, אף שהגליל מעוקם במרחב והמישור אינו מעוקם.

כדי למדוד את הכיפוף של המשטח בתוך R^3 נשתמש בתבנית היסודית השנייה.

2. המישור המשיק, וקטור משיק והנורמל למשטח

בנקודה $P = X(u_0, v_0)$, שני הווקטורים $X_u(P)$ ו- $X_v(P)$ פורשים את המישור המשיק:

$$T_P S = \text{span}\{X_u, X_v\}.$$

כל וקטור משיק בנקודה שייך למישור הזה. לכן אם בוחרים וקטור משיק מסוים w , ניתן לכתוב

$$w = aX_u + bX_v, w \in T_P S.$$

חשוב להבחין: $T_P S$ הוא כל המישור המשיק, ואילו w הוא וקטור אחד מסוים בתוך המישור המשיק, כלומר כיוון מסוים שבו נרצה להתקדם על המשטח.

וקטור יחידה המאונך למישור המשיק הוא

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

זהו הנורמל למשטח בנקודה P , ובאופן שקול גם הנורמל למישור המשיק באותה נקודה. לכן

$$N \perp X_u, N \perp X_v, N \perp T_P S.$$

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

חשוב: N הוא וקטור כיוון. הוא אומר מהו הכיוון המאונך למשטח, אך אינו אומר כמה המשטח מתעקם. מישור משיק, וקטור משיק w והנורמל למשטח N .

3. התבנית היסודית השנייה

נגזור את הפרמטריזציה פעם נוספת:

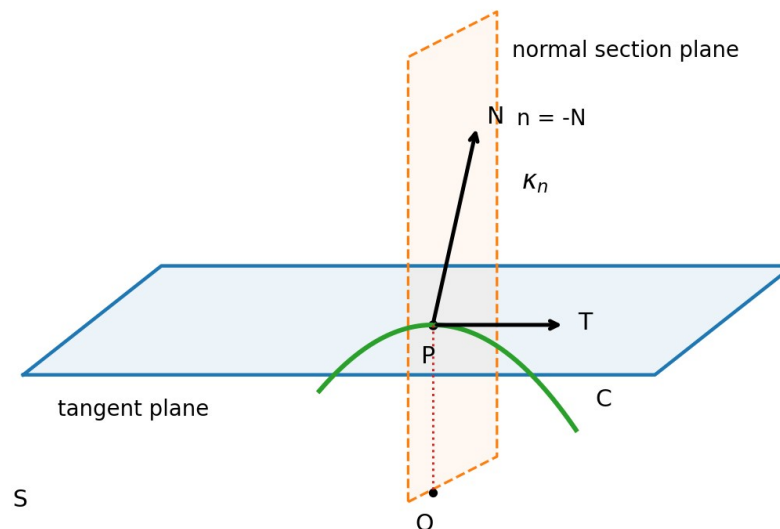
$$X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}.$$

ניקח מכל נגזרת שנייה את הרכיב בכיוון הנורמל N :

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle, f = \langle X_{uv}, N \rangle, g = \langle X_{vv}, N \rangle.$$

התבנית היסודית השנייה היא

$$II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2.$$



3.1 הגדרה של עקמומיות נורמלית

נבחר בנקודה P על המשטח וקטור משיק יחידתי T . העקמומיות הנורמלית בכיוון T מודדת את רכיב ההתעקמות של המשטח בכיוון הנורמל למשטח כאשר מתקדמים בכיוון T .

כאשר T יחידתי, מגדירים:

$$\kappa_n(T) = II(T, T) (\|T\| = 1)$$

אם γ היא עקומה כלשהי על המשטח העוברת ב- P ומשיקה ל- T , ולעקומה יש עקמומיות κ ונורמל ראשי n , אז וקטור העקמומיות שלה הוא κn . העקמומיות הנורמלית היא ההיטל של וקטור זה על נורמל המשטח N :

$$\kappa_n = \langle \kappa n, N \rangle = \kappa \cos \varphi, \varphi = \angle(n, N)$$

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

לכן ϕ היא הזווית בין הנורמל הראשי של העקומה γ לבין הנורמל למשטח N . בהמשך נחدد מדוע n ו- N אינם בהכרח מקבילים או מאונכים, וכיצד הפירוק הזה מוביל גם לעקמומיות גאודזית.

3.2 פירוש טיילור של התבנית היסודית השנייה

נבחר בנקודה P כיוון משיק יחידתי T ונלך על המשטח מרחק קטן s בכיוון הזה. המישור המשיק הוא הקירוב הליניארי של המשטח בנקודה P . כאשר מתרחקים מעט מן הנקודה, המשטח מתחיל להיפרד מן המישור המשיק.

אם $h(s)$ הוא ההעתק החתום של המשטח בכיוון הנורמל N ביחס למישור המשיק, אפשר להבין את הקשר לתבנית השנייה ישירות באמצעות קירוב טיילור.

נבחר עקומה $\gamma(s)$ על המשטח כך ש-

$$\gamma(0)=P, \gamma'(0)=T, \|T\|=1,$$

כאשר s הוא אורך קשת. נפתח את $h(s)$ בטור טיילור סביב $s=0$:

$$h(s)=h(0)+h'(0)s+\frac{1}{2}h''(0)s^2+O(s^3).$$

כעת נבחן את שלושת האיברים הראשונים:

1. בנקודה $s=0$ אנו נמצאים בדיוק בנקודה P , שנמצאת במישור המשיק, ולכן

$$h(0)=0.$$

2. כיוון התנועה ההתחלתי T נמצא בתוך המישור המשיק ולכן הוא מאונך לנורמל N . מכאן שאין שינוי מסדר ראשון בגובה מעל המישור המשיק:

$$h'(0)=0.$$

3. הנגזרת השנייה מודדת את הרכיב הנורמלי של התאוצה של העקומה. לפי מוסכמת הסימן שבה

$$e=\langle X_{uu}, N \rangle, f=\langle X_{uv}, N \rangle, g=\langle X_{vv}, N \rangle,$$

מתקיים

$$h''(0)=II(T, T).$$

לכן

$$h(s)=\frac{1}{2}II(T, T)s^2+O(s^3),$$

ועבור s קטן מקבלים את קירוב טיילור מסדר שני

$$h(s)\approx\frac{1}{2}II(T, T)s^2.$$

כלומר $II(T, T)$ הוא בדיוק המקדם המתאר, מסדר שני, כמה מהר המשטח עוזב את המישור המשיק כאשר מתקדמים בכיוון T .

כאשר T יחידתי מתקיים גם

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

$$II(T, T) = \kappa_n(T),$$

ולכן אפשר לכתוב

$$h(s) \approx \frac{1}{2} \kappa_n(T) s^2.$$

זהו פירוש שימושי מאוד לעקמומיות הנורמלית: היא קובעת את קצב ההתרחקות הריבועי של המשטח מן המישור המשיק בכיוון שנבחר. אם $\kappa_n = 0$, אין איבר ריבועי בכיוון הזה; ואם κ_n גדול, המשטח עוזב את המישור המשיק מהר יותר.

אפשר לזכור:

- I אומרת כמה ארוך כיוון מסוים על המשטח.
 - II אומרת כמה המשטח מתרחק מן המישור המשיק ומתעקם כאשר מתקדמים בכיוון הזה.
- הערת סימן: אם מחליפים N ב- $-N$, אז e, f, g מחליפים סימן. לכן גם העקמומיות הנורמלית והעקמומיות הראשיות מחליפות סימן. עקמומיות גאוס אינה משתנה.

4. אופרטור הצורה

4.1 מה הוא אומר מבחינה גאומטרית?

בכל נקודה P יש נורמל יחידתי $N(P)$. כאשר נעים על המשטח, גם הנורמל עשוי לשנות את כיוונו. במישור הנורמל קבוע בכל כיוון. בגליל, אם נעים לאורך הציר הנורמל אינו משתנה, אבל אם נעים סביב ההיקף הנורמל מסתובב.

אופרטור הצורה מודד את קצב השינוי של הנורמל למשטח כאשר מתקדמים בכיוון משיק מסוים.

אם $w \in T_p S$, מגדירים

$$S(w) = -D_w N.$$

כלומר S מקבל וקטור משיק w ומחזיר וקטור משיק המתאר כיצד הנורמל משתנה כאשר נעים בכיוון w :

$$S: T_p S \rightarrow T_p S.$$

בבסיס הפרמטרי $\{X_u, X_v\}$, מטריצות שתי התבניות הן

$$[I] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, [II] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

ומטריצת אופרטור הצורה מתקבלת מן הקשר

$$[S] = [I]^{-1} [II].$$

הנוסחה אינה ההגדרה הרעיונית של S ; היא רק הדרך לייצג בקואורדינטות את הפעולה $w \mapsto -D_w N$.

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

4.1.1 מהו $D_w N$ ולמה מופיע סימן מינוס?

הסימון $D_w N$ הוא הנגזרת הכיוונית של שדה הנורמלים N בכיוון w . מבחינה מושגית, אם חושבים על N כמפת גאוס מן המשטח אל הספירה היחידתית, זהו בדיוק הדיפרנציאל dN_p המופעל על w .

$$D_w N = dN_p(w) = \left. \frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \right|_{t=0}, \gamma(0)=p, \gamma'(0)=w$$

מאחר ש- N הוא וקטור יחידה בכל נקודה, מתקיים $\langle N, N \rangle = 1$. גוזרים בכיוון w ומקבלים ש- $D_w N$ מאונך ל- N . לכן $D_w N$ עצמו שייך למישור המשיק.

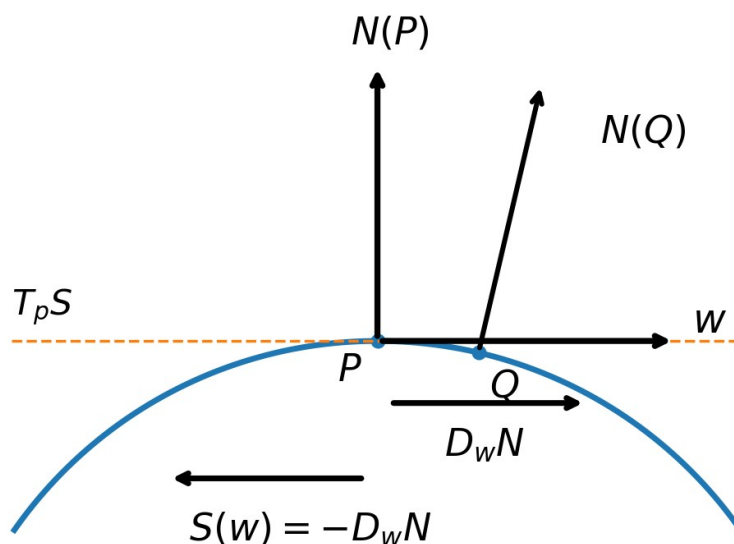
$$\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle D_w N, N \rangle = 0 \Rightarrow D_w N \in T_p S$$

המינוס בהגדרת אופרטור הצורה הוא מוסכמת סימן סטנדרטית. הוא נבחר כך שהתבנית היסודית השנייה תתקבל ישירות מן אופרטור הצורה באמצעות המכפלה הפנימית:

$$S(w) = -D_w N, II(u, v) = \langle S(u), v \rangle = -\langle dN_p(u), v \rangle$$

אם היינו מגדירים את אופרטור הצורה ללא מינוס, הגאומטריה לא הייתה נעלמת, אבל סימני העקמומיות הראשיות היו מתהפכים. עקמומיות גאוס $K = k_1 k_2$ אינה משתנה כאשר הופכים את שני הסימנים יחד.

Outward normal on a sphere: $D_w N$ follows w ; $S(w) = -D_w N$



איור: בחתך של ספירה עם נורמל חיצוני, כאשר נעים מ- P בכיוון w , הנורמל N משתנה בכיוון w ולכן $D_w N$ מצביע בכיוון w . לפי ההגדרה $S(w) = -D_w N$, אופרטור הצורה מצביע בכיוון ההפוך. עבור ספירה ברדיוס R ונורמל חיצוני מתקבל:

$$dN_p(w) = \frac{1}{R} w, S(w) = -\frac{1}{R} w$$

הערת מוסכמה: עם הבחירה $S = -dN$ והנורמל החיצוני, העקמומיות הראשיות של הספירה הן $-1/R$. אם בוחרים נורמל פנימה, הן $+1/R$. יש ספרים המשתמשים במוסכמת סימן הפוכה; העיקר הוא להיות עקביים.

4.2 למה הערכים העצמיים של S הם העקמומיות הראשיות?

לכיוון משיק יחידתי v העקמומיות הנורמלית היא

$$\kappa_n(v) = \langle S(v), v \rangle.$$

אם v הוא וקטור עצמי של S , כלומר

$$S(v) = \lambda v,$$

אז, מאחר ש- $\|v\| = 1$,

$$\kappa_n(v) = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda.$$

לכן בכיוון עצמי, הערך העצמי הוא בדיוק העקמומיות הנורמלית באותו כיוון.

אופרטור הצורה סימטרי ביחס למכפלה הפנימית של המשטח, ולכן קיימים שני כיוונים עצמיים יחידתיים ומאונכים e_1, e_2 עם ערכים עצמיים k_1, k_2 . כל כיוון יחידתי אחר ניתן לכתוב

$$v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2.$$

ואז מתקבלת נוסחת אוילר:

$$\kappa_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

לכן הערך המינימלי והמקסימלי של κ_n מתקבלים בכיוונים העצמיים והם בדיוק k_1, k_2 . אלה נקראות העקמומיות הראשיות.

5. עקמומיות גאוס מן התבנית היסודית השנייה

עקמומיות גאוס מוגדרת כמכפלת העקמומיות הראשיות:

$$K = k_1 k_2.$$

מכיוון שהדטרמיננטה של אופרטור היא מכפלת הערכים העצמיים שלו,

$$K = \det S.$$

מן הקשר $[S] = [I]^{-1} [II]$ נקבל

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

לכן סדר חישוב טיפוסי הוא:

1. מחשבים X_u, X_v ומכאן E, F, G .
 2. מחשבים נורמל יחידתי N .
 3. מחשבים X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ומכאן e, f, g .
- מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

6. העמקה גאומטרית: חתך נורמלי ויחסו לנורמל המשטח

6.1 ההגדרה האלגברית

נבחר בנקודה P וקטור משיק מסוים $w \in T_P S$. נכתוב

$$w = a X_u + b X_v.$$

העקמומיות הנורמלית בכיוון w היא

$$\kappa_n(w) = \frac{II(w, w)}{I(w, w)} = \frac{e a^2 + 2 f a b + g b^2}{E a^2 + 2 F a b + G b^2}.$$

אם T הוא כבר וקטור משיק יחידתי, אז $I(T, T) = 1$, ולכן

$$\kappa_n(T) = II(T, T).$$

6.2 ההגדרה הגאומטרית - חתך נורמלי

נבחר כיוון משיק יחידתי T בנקודה P . בונים את המישור העובר דרך P ומכיל את שני הווקטורים

$$T \text{ ו- } N.$$

מישור זה נקרא **מישור חתך נורמלי**. החיתוך המקומי שלו עם המשטח אינו בדרך כלל נקודה: הוא יוצר עקומה מישורית C העוברת דרך P . המשיק של C בנקודה P הוא בדיוק T .

העקמומיות של עקומת החתך בנקודה P , עם סימן ביחס לבחירת N , היא העקמומיות הנורמלית בכיוון T .

6.3 בין איזה וקטורים מופיעה הזווית?

לעקומה C יש משיק יחידתי T , נורמל ראשי n ועקמומיות κ . וקטור העקמומיות שלה הוא

$$\kappa n.$$

העקמומיות הנורמלית היא ההיטל של וקטור העקמומיות על נורמל המשטח N :

$$\kappa_n = \langle \kappa n, N \rangle = \kappa \cos \varphi,$$

כאשר

$$\varphi = \angle (n, N).$$

לכן הזווית הרלוונטית היא בין הנורמל הראשי של העקומה n לבין הנורמל למשטח N , ולא בין T ל- N ; הרי $T \perp N$ תמיד.

6.4 למה N ו- n אינם בהכרח מאונכים? והקשר לעקמומיות גאודזית

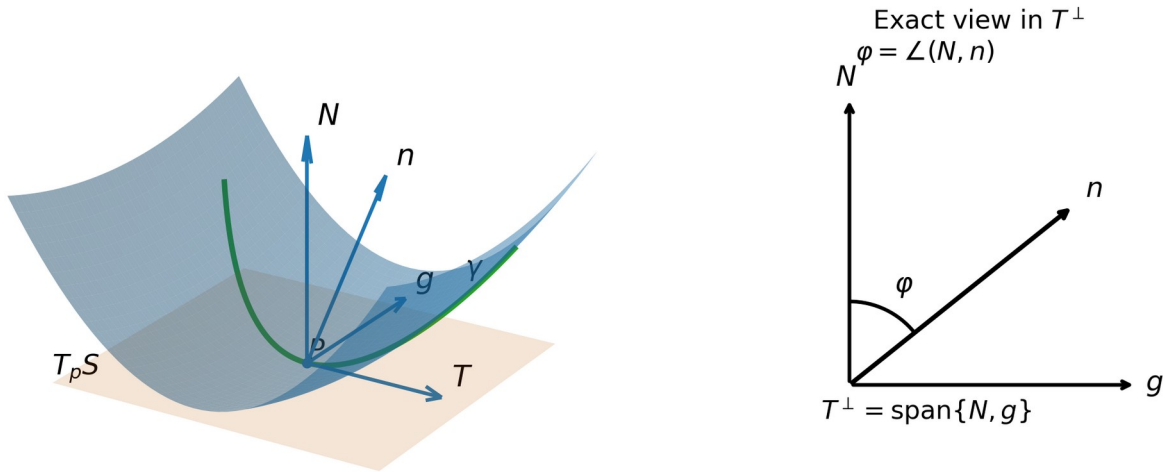
לעקומה על המשטח יש משיק יחידתי T . הנורמל למשטח N מאונך לכל המישור המשיק ולכן $T \perp N$. הנורמל הראשי n של העקומה מאונך ל- T לפי מסגרת Frenet, ולכן גם $T \perp n$. אבל משתי העובדות האלה לא נובע ש- $N \perp n$.

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

$$T \perp N, T \perp n, N \perp \nabla n \text{ in general}$$

שני הווקטורים N ו- n שייכים לאותו מישור דו-ממדי $T^\perp$ המאונך ל- T . בתוך המישור הזה הם יכולים ליצור זווית כלשהי φ . לכן הזווית $\varphi = \angle(N, n)$ אינה בדרך כלל 0 , $\pi/2$ או π .

$$T \perp N, \quad T \perp n, \quad N \perp n$$



איור: משמאל מוצגים T , N , n ו- g בנקודה P על המשטח. מימין מוצג המישור $T^\perp$ בנפרד, ולכן רואים במדויק שהזווית φ היא בין N לבין n .

נגדיר וקטור משיק יחידתי נוסף $g = N \times T$. אז $\{T, g, N\}$ היא מסגרת אורתונורמלית המותאמת למשטח (מסגרת Darboux), ואילו $\{T, n, B\}$ היא מסגרת Frenet של העקומה, כאשר $B = T \times n$.

$$\{T, n, B\} \setminus (\text{Frenet}), B = T \times n; \{T, g, N\} \setminus (\text{Darboux}), g = N \times T$$

$$N, n \in T^\perp, \varphi = \angle(N, n)$$

לעומת זאת, השלשה $\{T, N, n\}$ בדרך כלל אינה מערכת אורתונורמלית: T מאונך לשני האחרים, אבל N ו- n אינם בהכרח מאונכים זה לזה.

מאחר ש- n נמצא במישור $T^\perp = \text{span}\{N, g\}$, ניתן לפרק אותו בבסיס $\{N, g\}$. אם φ היא זווית מכוונת במישור זה, בהתאם לאוריינטציה שקובעים באמצעות g , מתקבל:

$$n = \cos \varphi N + \sin \varphi g$$

אם משתמשים בזווית הלא-מכוונת שבין N לבין n , הנוסחה לעקמומיות הנורמלית נשארת מדויקת. עבור הרכיב הגאודזי, הסימן תלוי באוריינטציה; הערך המוחלט שלו נקבע על ידי הסינוס של הזווית. הנוסחאות המדויקות מופיעות מיד למטה.

כעת מפרקים את וקטור העקמומיות של העקומה לשני רכיבים מאונכים:

$$\kappa n = \kappa_n N + \kappa_g g$$

$$\kappa_n = \kappa \cos \varphi, \kappa_g = \kappa \sin \varphi, \kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

הרכיב בכיוון N הוא הרכיב הנורמלי למשטח, והוא מודד את ההתעקמות של העקומה מחוץ למישור המשיק. הרכיב בכיוון g נמצא בתוך המישור המשיק ומודד את הפנייה של העקומה בתוך המשטח; המקדם שלו נקרא העקמומיות הגאודזית.

מאחר ש- N מאונך ל- g , שני רכיבי וקטור העקמומיות מאונכים. לכן הזהות המופיעה במשוואה שמעל היא פשוט משפט פיתגורס עבור וקטור העקמומיות.

בחתך נורמלי, בנקודת החתך, הנורמל הראשי של עקומת החתך מקביל לנורמל המשטח. לכן:

$$n = \pm N, \kappa_g = 0, \kappa_n = \pm \kappa$$

גם לאורך עקומה גאודזית הרכיב הגאודזי של וקטור העקמומיות מתאפס. בנקודות שבהן העקמומיות הכוללת אינה אפס, וקטור העקמומיות כולו נורמלי למשטח ולכן הנורמל הראשי של העקומה מקביל או מנוגד לנורמל המשטח. חשוב להבדיל: חתך נורמלי הוא בנייה מקומית באמצעות מישור החתך בנקודה, ואילו גאודזיות היא תכונה של העקומה לאורך המשטח. חתך נורמלי מאפס את הרכיב הגאודזי בנקודת החתך, אך אינו חייב להיות גאודזי לכל אורכו.

6.5 מה קורה בחתך נורמלי?

בחתך נורמלי גם n וגם N נמצאים במישור החתך ומאונכים ל- T . לכן, כאשר $\kappa \neq 0$,

$$n = \pm N.$$

לא מתחייב שהם יהיו בכיוונים מנוגדים. מה שמתחייב הוא שהם מקבילים.

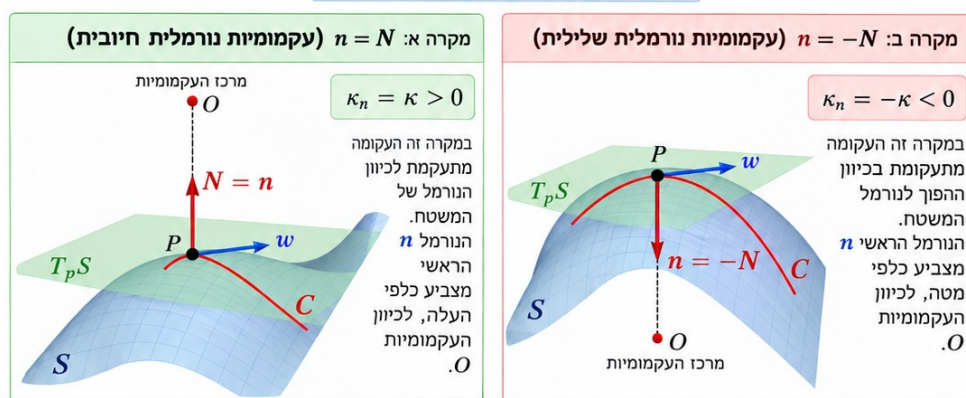
- אם העקומה מתעקמת לכיוון N , אז $n = N$ ו- $\kappa_n = \kappa > 0$.
- אם העקומה מתעקמת לכיוון $-N$, אז $n = -N$ ו- $\kappa_n = -\kappa < 0$.

מרכז העקמומיות O של עקומת החתך נמצא תמיד בצד שאליו העקומה מתעקמת, כלומר בכיוון n :

$$O = P + \rho n, \rho = \frac{1}{|\kappa|}.$$

אם $\kappa = 0$, הנורמל הראשי n אינו מוגדר באותה נקודה, בעוד שהעקמומיות הנורמלית היא אפס.

3. שני המקרים האפשריים – ציורים



שני המצבים האפשריים בחתך נורמלי: $n = N$ ו- $n = -N$. מרכז העקמומיות נמצא בצד ההתעקמות.

7. הבחנה בין N, n, B ו- κ_n

- N - נורמל למשטח, כלומר הנורמל למישור המשיק בנקודה. זהו וקטור יחידה.
- n - הנורמל הראשי של עקומה. זהו וקטור יחידה המצביע לכיוון שבו העקומה מתעקמת.
- $B = T \times n$ - הבינורמל של העקומה. הוא מאונך למישור האוסכולטורי של העקומה.
- κ_n - העקמומיות הנורמלית. זהו **מספר**, לא וקטור; הוא מודד את רכיב העקמומיות בכיוון N .

בדרך כלל n אינו שווה ל- N , ולכן גם B אינו שווה ל- N . רק בחתך נורמלי מתקיים $n = \pm N$. במקרה כזה

$$B = T \times n = \pm(T \times N),$$

ולכן B נמצא במישור המשיק למשטח ומאונך ל- T .

דוגמה: אותו מישור משיק ואותו נורמל, אבל עקמומיות נורמלית שונה

נשווה בנקודה $(0,0,0)$ בין שני משטחים.

מישור:

$$S_1: z=0.$$

גליל פרבולי:

$$S_2: z = \frac{x^2}{2R}.$$

בשני המשטחים, בנקודה $(0,0,0)$, המישור המשיק הוא $z=0$ והנורמל היחידתי הוא

$$N = (0,0,1).$$

אבל במישור

$$\kappa_n(T) = 0$$

לכל כיוון T . לעומת זאת בגליל הפרבולי, בכיוון x ,

$$\kappa_n = \frac{1}{R},$$

ובכיוון y ,

$$\kappa_n = 0.$$

כלומר **נורמל זהה אינו אומר עקמומיות זהה**. N אומר מהו הכיוון המאונך בנקודה; κ_n אומר כמה המשטח מתעקם בכיוון משיק מסוים.

8. דוגמה בסיסית: גליל

ניקח גליל ברדיוס R :

$$X(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v).$$

נגזור:

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

$$X_u = (-R \sin u, R \cos u, 0), X_v = (0, 0, 1).$$

לכן

$$E = R^2, F = 0, G = 1.$$

נבחר נורמל החוצה:

$$N = (\cos u, \sin u, 0).$$

הנגזרות השניות הן

$$X_{uu} = (-R \cos u, -R \sin u, 0), X_{uv} = 0, X_{vv} = 0.$$

ולכן

$$e = -R, f = 0, g = 0.$$

מכאן

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

הגליל מעוקם במרחב, אך עקמומיות גאוס שלו היא אפס: הוא מתעקם בכיוון ההיקפי, אך אינו מתעקם לאורך הציר.

9. תרגיל מסכם - שתי מכוניות על גשר קמור

הגשר מתואר על ידי

$$X(u, v) = \left(25 \sin \frac{u}{25}, v, 25 \left(\cos \frac{u}{25} - 1 \right) \right),$$

כאשר u מודד מרחק לאורך הגשר ו- v מודד מיקום לרוחב הכביש.

סעיף א - התבנית היסודית הראשונה

חשבו את X_u, X_v ואת E, F, G .

פתרון

$$X_u = \left(\cos \frac{u}{25}, 0, -\sin \frac{u}{25} \right), X_v = (0, 1, 0).$$

ולכן

$$E = 1, F = 0, G = 1,$$

ומכאן

$$I = du^2 + dv^2.$$

כלומר בקואורדינטות (u, v) מדידת האורך על הגשר היא אוקלידית:

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2}.$$

בפרט, כאשר v קבוע, שינוי של מטר אחד ב- u הוא מטר אחד לאורך הכביש.

סעיף ב - מסלול קצר על פני הגשר

מכונית צריכה לעבור בין

$$A:(u,v)=(-15,-2), B:(u,v)=(15,2).$$

מצאו את אורך המסלול הקצר ביותר על פני הגשר.

פתרון

מאחר שהמטריקה בקואורדינטות (u,v) היא אוקלידית, המסלול הקצר במישור הפרמטרים הוא קטע ישר. לכן

$$L_{min} = \sqrt{30^2 + 4^2} = \sqrt{916} \approx 30.27 m.$$

כאשר מחזירים את הקטע אל הגשר הוא נראה עקום במרחב, אך הוא גאודזי על פני המשטח.

סעיף ג - מרחק פיזיקלי בין שתי מכוניות שאינן נקודות

כדי למדוד מרחק בטיחות, לא נייצג כל מכונית כנקודה בלבד. נניח ששתי המכוניות נוסעות באותו נתיב $v=0$, אורכה של כל מכונית הוא 4 מטר, ומיקומי מרכזי המכוניות הם

$$u_A(t) = -12 + 6t, u_B(t) = 2 + 4t.$$

המכונית A היא האחורית ונוסעת מהר יותר; המכונית B היא הקדמית.

הנקודה הקדמית של A מתקבלת בהוספת חצי אורך המכונית:

$$P_A^{front}(t) = X(u_A(t) + 2, 0) = X(-10 + 6t, 0).$$

הנקודה האחורית של B היא

$$P_B^{rear}(t) = X(u_B(t) - 2, 0) = X(4t, 0).$$

מצאו את הפער לאורך הכביש בין שתי המכוניות. מתי הוא יורד ל-2 מטר, ומתי מתרחש מגע ראשון?

פתרון

מאחר ש- $E=1$ ובאותו נתיב v קבוע, הפרמטר u הוא ממש אורך קשת לאורך הכביש. לכן, כל עוד A מאחורי B ,

$$d_{gap}(t) = u_B^{rear}(t) - u_A^{front}(t).$$

נציב:

$$d_{gap}(t) = 4t - (-10 + 6t) = 10 - 2t.$$

לכן סף בטיחות של 2 מטר מתקבל כאשר

$$10 - 2t = 2 \Rightarrow t = 4.$$

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

מגע ראשון מתקבל כאשר

$$10 - 2t = 0 \Rightarrow t = 5.$$

זהו מודל פיזיקלי מדויק יותר מן המרחק בין מרכזי המכוניות. הוא מודד את המרחק בין חזית המכונית האחורית לבין אחורי המכונית הקדמית.

הערה חשובה: הנוסחאות $u \pm L/2$ תקפות כאן משום ש- $E=1$, כלומר u מודד אורך אמיתי לאורך הנתיב. בפרמטריזציה כללית לא ניתן פשוט להוסיף $L/2$ לפרמטר; יש להשתמש בתבנית היסודית הראשונה כדי להמיר אורך פיזי לשינוי בפרמטר.

סעיף ד - התבנית היסודית השנייה של הגשר

מצאו את N ואת e, f, g .

פתרון

נורמל יחידתי הוא

$$N = \left(\sin \frac{u}{25}, 0, \cos \frac{u}{25} \right).$$

וכן

$$X_{uu} = -\frac{1}{25} N, X_{uv} = 0, X_{vv} = 0.$$

לכן

$$e = -\frac{1}{25}, f = 0, g = 0,$$

ומכאן

$$II = -\frac{1}{25} du^2.$$

המשמעות: הכביש מתעקם בכיוון u - הכיוון לאורך הגשר - ואינו מתעקם בכיוון v - הכיוון לרוחב הגשר.

סעיף ה - משמעות גאומטרית ישירה של II עבור המכונית

נניח שמכונית נמצאת בנקודה מסוימת ונוסעת לאורך הגשר, כלומר בכיוון היחידתי $T = X_u$. עד כמה הכביש נפרד מן המישור המשיק אחרי מרחק קטן s ?

פתרון

מאחר ש- $T = X_u$ יחידתי,

$$II(T, T) = -\frac{1}{25}.$$

לכן

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

$$h(s) \approx \frac{1}{2} I I(T, T) s^2 = -\frac{s^2}{50}.$$

לדוגמה, לאחר $s=2$ מטר,

$$h(2) \approx -\frac{4}{50} = -0.08 \text{ m}.$$

כלומר ביחס למישור המשיק בנקודת ההתחלה, הכביש נמצא כ-8 סנטימטרים בצד N – לאחר שני מטרים. זהו פירוש גאומטרי מוחשי של התבנית היסודית השנייה.

סעיף ו - עקמומיות גאוס של הגשר

חשבו את K .

פתרון

$$K = \frac{e g - f^2}{E G - F^2} = \frac{(-1/25) \cdot 0 - 0}{1 \cdot 1 - 0} = 0.$$

לכן

$$K=0.$$

הגשר מעוקם במרחב, אך הוא משטח גלילי ולכן ניתן לפריסה מקומית למישור ללא מתיחה.

סעיף ז - העקמומיות הנורמלית בכיוון נסיעת המכונית

מכונית B ממשיכה ישר לאורך הגשר, ולכן כיוון נסיעתה הוא

$$T_B = X_u.$$

מכונית A מתחילה מעבר נתיב, ולכן ברגע מסוים כיוון התנועה שלה פרופורציונלי ל

$$w_A = 6 X_u + 2 X_v.$$

השוו את העקמומיות הנורמלית ששתי המכוניות חוות.

פתרון

עבור B :

$$\kappa_{n,B} = I I(X_u, X_u) = -\frac{1}{25} = -0.04 \text{ m}^{-1}.$$

עבור A ננרמל:

$$T_A = \frac{6 X_u + 2 X_v}{\sqrt{40}}.$$

ולכן

$$\kappa_{n,A} = I I(T_A, T_A) = -\frac{1}{25} \left(\frac{6}{\sqrt{40}} \right)^2 = -0.036 \text{ m}^{-1}.$$

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

כלומר שתי המכוניות נמצאות על אותו משטח, אך בגלל כיווני נסיעה שונים הן חוות עקמומיות נורמלית שונה. מכונית B נוסעת כולה בכיוון שבו הגשר מתעקם; למכונית A יש גם רכיב תנועה לרוחב, שבו עקמומיות הגשר היא אפס.

זהו התפקיד הישיר של התבנית היסודית השנייה בדוגמת המכוניות: היא אומרת **כמה הכביש מתעקם דווקא בכיוון שבו כל מכונית נעה**.

סעיף ח - מה אומרות שתי התבניות באותה בעיה?

באותו מודל של שתי המכוניות:

- התבנית היסודית הראשונה I מאפשרת למדוד אורכי מסלולים ומרחקי בטיחות על פני הכביש.
- התבנית היסודית השנייה II מודדת את הכיפוף של הכביש בכיוון הנסיעה של כל מכונית.
- העקמומיות הנורמלית κ_n מתקבלת מן היחס בין שתי התבניות בכיוון שנבחר.

לכן השילוב הוא

$$II \leftrightarrow \text{כיפוף הכביש בכיוון הנסיעה}, I \leftrightarrow \text{מרחק ותנועה על הכביש}$$

10. הרחבה לפרויקט תכנות

את הדוגמה ניתן להפוך לפרויקט Python או CARLA. הסטודנטים יכולים להציג בזמן אמת:

- את מיקום שתי המכוניות ואת חזית/אחורי כל מכונית.
- את $d_{gap}(t)$ ולא רק את המרחק בין מרכזי המכוניות.
- את וקטור המשיק לכל מכונית.
- את κ_n בכיוון הנסיעה של כל מכונית.
- התראת בטיחות כאשר d_{gap} יורד מתחת לסף שנקבע.
- בגרסה מתקדמת: מעבר נתיב שמשנה את כיוון T ולכן גם את העקמומיות הנורמלית.

11. סיכום נוסחאות מרכזיות

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

$$II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

$$[S] = [I]^{-1} [II],$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$\kappa_n(w) = \frac{II(w, w)}{I(w, w)},$$

וכאשר T יחידתי,

$$\kappa_n(T) = II(T, T).$$

מסמך לימודי - גאומטריה דיפרנציאלית

משפט מפתח: התבנית הראשונה אומרת כיצד מודדים על המשטח; התבנית השנייה אומרת כיצד המשטח עוזב את המישור המשיק ומתעקם במרחב. הנורמל N הוא וקטור כיוון, ואילו κ_n היא מידה מספרית של ההתעקמות בכיוון משיק שנבחר.

עקמומיות נורמלית, עקמומיות גאודזית והפירוק של וקטור העקמומיות

2. ההבחנה החשובה: N ו- n אינם בהכרח מאונכים

הנורמל למשטח N והנורמל הראשי n של העקומה שניהם מאונכים ל- T אך באופן כללי אינם מאונכים זה לזה.

$$T \perp N, \quad T \perp n \quad \text{אך בדרך כלל} \quad N \not\perp n$$

מכיון ש- N ו- n שניהם מאונכים ל- T , הם נמצאים באותו מישור דו-ממדי:

$$N, n \in T^\perp$$

בתוך המישור הזה הם יכולים ליצור כל זווית, $\varphi \in [0, \pi]$. שלוש הווקטורים $\{T, N, n\}$ אינם מהווים בדרך כלל מערכת אורתוגונלית.

מסגרות אורתונורמליות שימושיות:

- מסגרת העקומה (Frenet): $\{T, n, B\}$, כאשר $B = T \times n$.
- מסגרת המשטח: $\{T, g, N\}$, כאשר $g = N \times T$.

לעומת זאת, $\{T, N, n\}$ אינה בדרך כלל אורתוגונלית.

1. ההגדרה והקשר הבסיסי

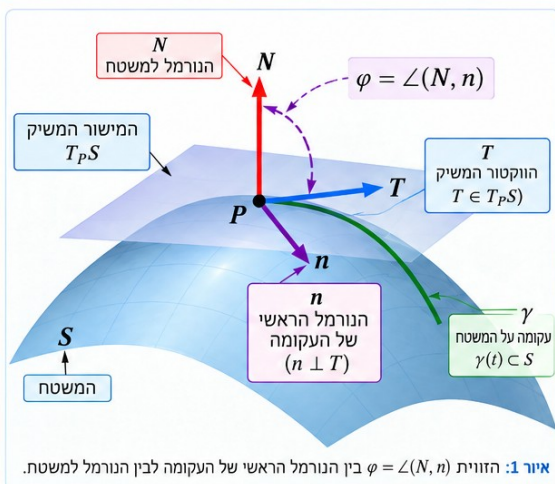
יהי $S \subset \mathbb{R}^3$ משטח חלק, נקודה $P \in S$ ו- $\gamma(t)$ עקומה חלקה על S עם $\gamma(0) = P$, נסמן:

- T - הווקטור המשיק לעקומה $\gamma(t)$ ($T = \gamma'(0) \in T_P S$).
- n - הנורמל הראשי של העקומה ($n \perp T, \|n\| = 1$).
- N - הנורמל למשטח, ($\|N\| = 1$).
- κ - עקמומיות העקומה, ($\|\gamma''(0)\| = \kappa$).

העקמומיות הנורמלית של העקומה במשטח מוגדרת כהרכיב של וקטור העקמומיות κn בכיוון הנורמל למשטח:

$$\kappa_n = \langle \kappa n, N \rangle = \kappa \cos \varphi \quad (1)$$

כאשר $\varphi = \angle(N, n)$ היא הזווית בין הנורמל הראשי של העקומה לבין הנורמל למשטח. בכל מקרה $\varphi \in [0, \pi]$, ולכן $\kappa_n \in [-\kappa, \kappa]$.



איור 1: הזווית $\varphi = \angle(N, n)$ בין הנורמל הראשי של העקומה לבין הנורמל למשטח.

3. פירוק הנורמל הראשי בתוך $T^\perp$

נגדיר $g = N \times T$, $\{N, g\}$ הווקטורים מהווים בסיס אורתונורמלי עבור המישור $T^\perp$. ניתן לפרק את הנורמל הראשי של העקומה כשילוב ליניארי:

$$n = \cos \varphi \cdot N + \sin \varphi \cdot g \quad (2)$$

(עד כדי בחירת אוריינטציה מתאימה). בהנחה זו, $\varphi = \angle(N, n)$ כפי שהוגדרה קודם.

4. פירוק וקטור העקמומיות

נשתמש בפירוק (2) כדי לפרק את וקטור העקמומיות κn :

$$\kappa n = \kappa \cos \varphi \cdot N + \kappa \sin \varphi \cdot g \quad (3)$$

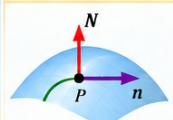
מכאן מתקבלים שני רכיבים חשובים:

- עקמומיות נורמלית: $\kappa_n = \kappa \cos \varphi = \langle \kappa n, N \rangle$.
- עקמומיות גאודזית: $\kappa_g = \kappa \sin \varphi = \langle \kappa n, g \rangle$.

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \quad (4)$$

5. מקרים מיוחדים

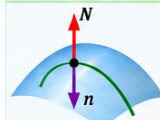
עקמומיות גאודזית טהורה



אם $n \perp N$ (לכן $\varphi = \pi/2$), העקמומיות כולה גאודזית.

$$\kappa_n = 0, \quad \kappa_g = \pm \kappa$$

חתך נורמלי



בחתך נורמלי מתקיים $n = \pm N$ ולכן $\varphi = 0$ או $\varphi = \pi$.

$$\kappa_n = \pm \kappa, \quad \kappa_g = 0$$

6. סיכום עיקרי

1. $\varphi = \angle(N, n)$ היא הזווית בין הנורמל הראשי של העקומה לבין הנורמל למשטח.
2. N ו- n מאונכים ל- T , אך אינם בהכרח מאונכים זה לזה.
3. N ו- n נמצאים במישור $T^\perp$ ויכולים ליצור כל זווית $\varphi \in [0, \pi]$.
4. $\kappa_n = \kappa \cos \varphi, \quad \kappa_g = \kappa \sin \varphi$.
5. $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$.
6. בחתך נורמלי: $\kappa_n = \pm \kappa, \quad \kappa_g = 0$. בעקומה גאודזית: $\kappa_n = 0, \quad \kappa_g = \pm \kappa$.