

מודל מצלמת נקב, כיול ומציאת מיקום וכיוון בתלת-ממד

גרסה מתוקנת - עם מתמטיקה מסודרת וציורים מדויקים

1. הסימונים ומה אנחנו רוצים למצוא

נרצה לעבור מנקודה תלת-ממדית במערכת המצלמה אל מיקום ההיטל שלה בתמונה, ולאחר מכן להשתמש בכיול כדי למצוא את מיקום וכיוון המצלמה במערכת העולם.

$$O_C = (0, 0, 0)$$

$$P_C = (X_C, Y_C, Z_C)$$

$$c = (c_x, c_y)$$

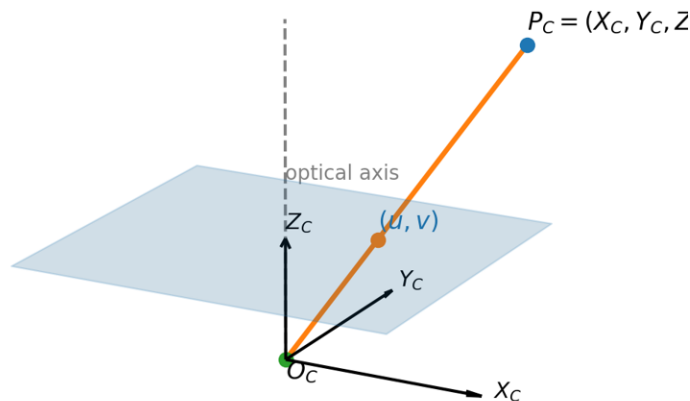
$$(u, v)$$

• מרכז המצלמה:

• נקודה במרחב ביחס למצלמה:

• הנקודה הראשית בתמונה:

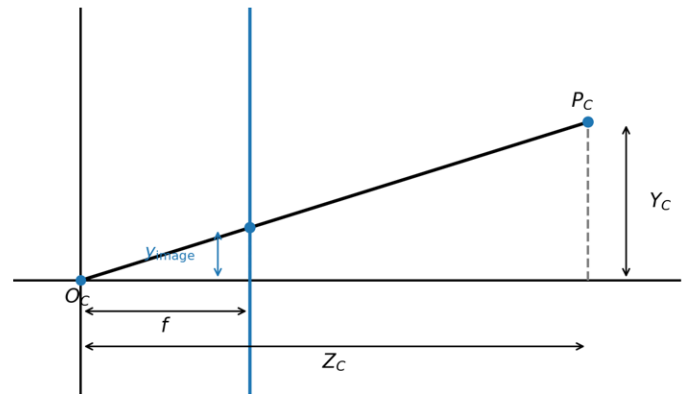
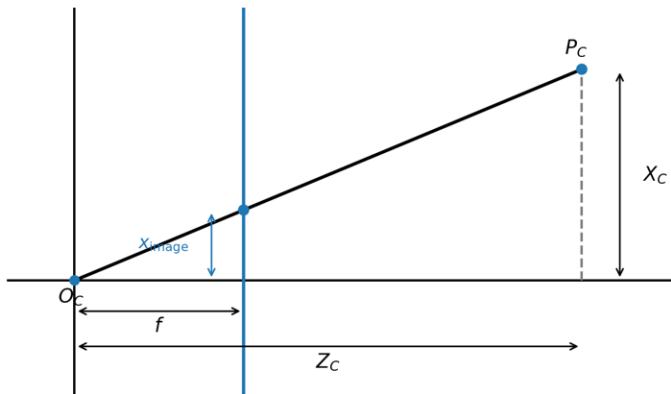
• מיקום ההיטל בפיקסלים:



הקו הישר היוצא ממרכז המצלמה ועובר דרך הנקודה התלת-ממדית חותך את מישור התמונה בנקודת ההיטל. את נקודת ההיטל מתארים בתמונה באמצעות הקואורדינטות (u, v) .

2. דמיון משולשים - שני חתכים נפרדים

כדי למצוא את ההיטל האופקי והאנכי לא משתמשים באותו ציור. עושים שני חתכים נפרדים: חתך אחד עבור הקואורדינטה האופקית, וחתך נוסף עבור הקואורדינטה האנכית.



$$\frac{x_{\text{image}}}{f} = \frac{X_C}{Z_C} \implies x_{\text{image}} = f \frac{X_C}{Z_C}$$

$$\frac{y_{\text{image}}}{f} = \frac{Y_C}{Z_C} \implies y_{\text{image}} = f \frac{Y_C}{Z_C}$$

חשוב: בשלב זה קיבלנו מרחקים פיזיקליים על מישור התמונה, למשל במילימטרים. עדיין לא עברנו לקואורדינטות פיקסלים.

3. דוגמה מספרית מפורטת - למה נקודה רחוקה מתקרבת למרכז התמונה

נבחר נקודה שהסטייה האופקית שלה מן הציר האופטי היא 10 ס"מ, ואורך המוקד הוא 20 מ"מ. נחשב את מיקום ההיטל בשני עומקים שונים.

$$X_C = 0.10 \text{ m} = 100 \text{ mm}, \quad f = 20 \text{ mm}$$

מקרה א: עומק של מטר אחד

$$Z_C = 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

$$x_{\text{image}} = 20 \cdot \frac{100}{1000} = 2 \text{ mm}$$

כלומר ההיטל נמצא במרחק של 2 מ"מ מן הנקודה הראשית בכיוון האופקי.

מקרה ב: עומק של שני מטרים

$$Z_C = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$$

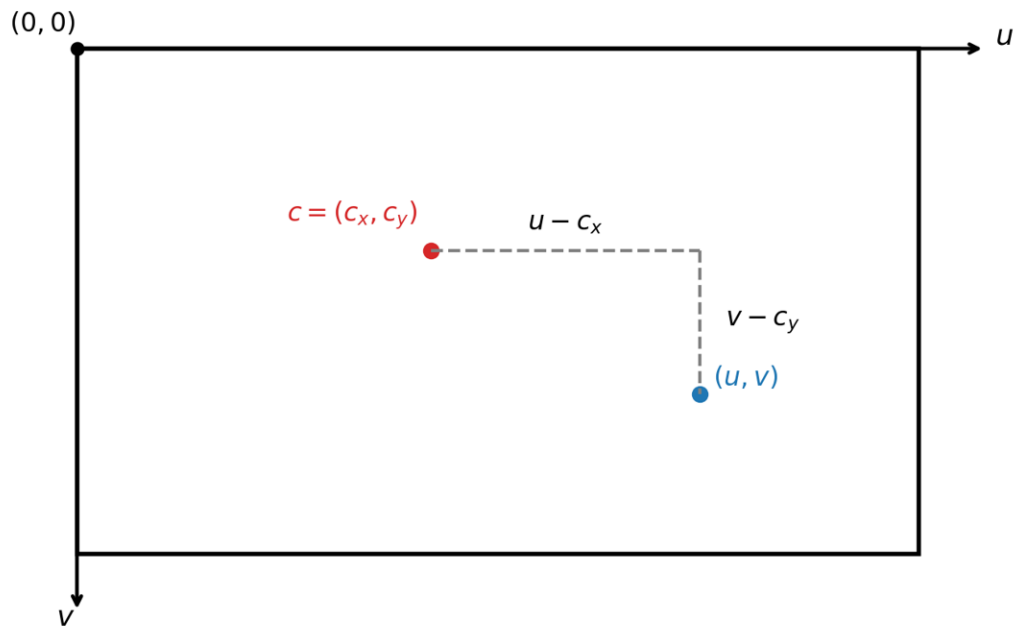
$$x_{\text{image}} = 20 \cdot \frac{100}{2000} = 1 \text{ mm}$$

העומק הוכפל ולכן המרחק של ההיטל מן הנקודה הראשית קטן לחצי. זו בדיוק השפעת החלוקה ב- Z_C .

האות m שמופיעה אחרי מספר היא יחידת מטר, ו- mm היא יחידת מילימטר. אין כאן משתנה נוסף בשם m .

4. ממישור התמונה למטריצת הפיקסלים

במערכת הפיקסלים הראשית נמצאת בדרך כלל בפינה השמאלית-עליונה. לעומתה, הנקודה הראשית של המצלמה היא המקום שבו הציר האופטי חותך את מישור התמונה. הסימונים המדויקים מופיעים בציור ובנוסחאות שמתחתיו.



הציור מראה את ההפרש האופקי ואת ההפרש האנכי בין נקודת ההיטל לבין הנקודה הראשית. כעת נמיר את המרחקים הפיזיקליים לפיקסלים.

שלב 1 - המרה לפיקסלים:

$$u - c_x = s_x x_{\text{image}}, \quad v - c_y = s_y y_{\text{image}}$$

שלב 2 - מציבים את דמיון המשולשים:

$$x_{\text{image}} = f \frac{X_C}{Z_C}, \quad y_{\text{image}} = f \frac{Y_C}{Z_C}$$

שלב 3 - מגדירים אורכי מוקד בפיקסלים:

$$f_x = s_x f, \quad f_y = s_y f$$

שלב 4 - נוסחאות ההיטל:

$$u = f_x \frac{X_C}{Z_C} + c_x, \quad v = f_y \frac{Y_C}{Z_C} + c_y$$

5. מטריצת המצלמה והליך הכיול

את הפרמטרים הפנימיים מרכזים במטריצת הכיול K . בנוסף מעריכים את מקדמי עיוות העדשה. את ההערכה מבצעים מתמונות רבות של תבנית בעלת גאומטריה ידועה, כגון Chessboard או ChArUco.

$$K = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 מצלמים את לוח הכיול מזוויות וממרחקים שונים.

2 מזהים פינות שחמט או פינות ChArUco בתמונה.

3 יודעים את הקואורדינטות התלת-ממדיות של אותן פינות על הלוח.

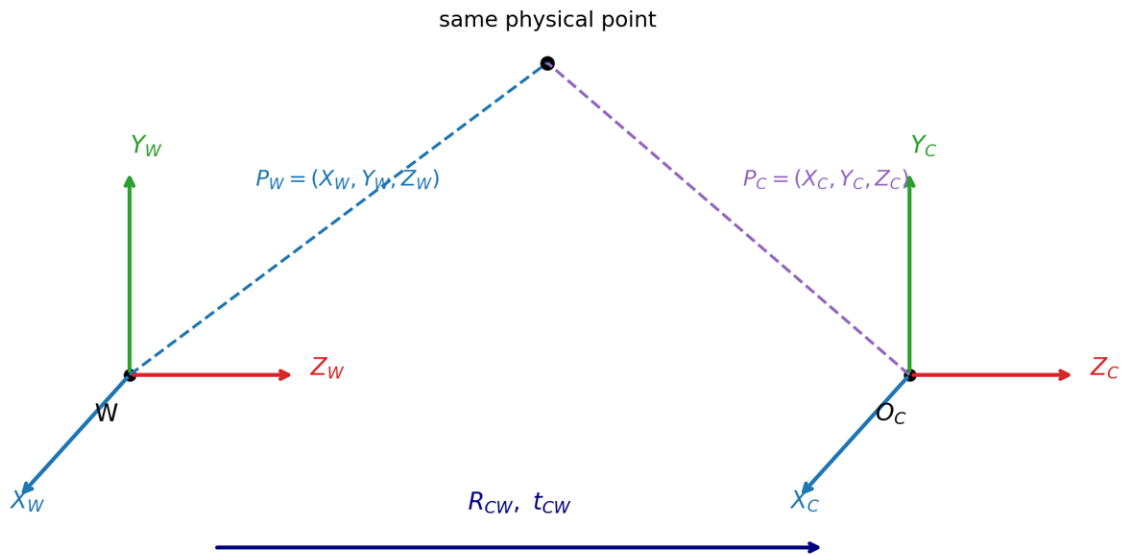
4 מעריכים את K ואת מקדמי העיוות D כך ששגיאת ההקרנה מחדש תהיה קטנה.

5 בתמונה חדשה משתמשים בהתאמות 3D-2D כדי לאמוד R ו- t .

למציאת תנוחה בתלת-ממד, OpenCV משתמש בהתאמות בין נקודות תלת-ממדיות במערכת הלוח לבין נקודות דו-ממדיות בתמונה. הפונקציה solvePnP מחזירה סיבוב והזזה שמעבירים מן הלוח אל מערכת המצלמה.

6. שתי מערכות צירים: העולם והמצלמה

אחרי הכיול, נרצה לתאר את אותה נקודה פיזית פעם אחת במערכת העולם ופעם אחת במערכת המצלמה. המעבר ביניהן מורכב מסיבוב והזזה.



$$P_C = R_{CW}P_W + t_{CW}$$

הסימון CW פירושו מעבר ממערכת העולם למערכת המצלמה. מטריצת הסיבוב ווקטור ההזזה מתארים כיצד קואורדינטות בעולם נכתבות מחדש במערכת המצלמה.

מהו וקטור ההזזה? אם מציבים את ראשית מערכת העולם במשוואת המעבר, מתקבל שווקטור ההזזה הוא מיקום ראשית העולם כפי שהיא נראית במערכת המצלמה. הוא אינו מיקום המצלמה בעולם.

7. גזירה איטית של מיקום המצלמה בעולם

המטרה כעת היא להפוך את הטרנספורמציה. נתחיל מהמשוואה שמתקבלת מ-solvePnP ונבודד בהדרגה את קואורדינטות הנקודה במערכת העולם.

$$P_C = R_{CW}P_W + t_{CW}$$

המשוואה המקורית.

$$P_C - t_{CW} = R_{CW}P_W$$

מחסירים את t_{CW} משני האגפים.

$$R_{CW}^{-1}(P_C - t_{CW}) = P_W$$

כופלים משמאל במטריצה ההפוכה.

$$R_{CW}^{-1} = R_{CW}^T$$

למטריצת סיבוב: ההופכי הוא הטרנספוז.

$$P_W = R_{CW}^T(P_C - t_{CW})$$

זוהי הטרנספורמציה ממצלמה לעולם.

עכשיו מציבים את מרכז המצלמה

במערכת המצלמה, מרכז המצלמה הוא הראשית ולכן הקואורדינטות שלו הן אפס. כעת נציב עובדה זו בנוסחת המעבר ההפוכה כדי לקבל את מיקום מרכז המצלמה במערכת העולם.

$$O_C^W = R_{CW}^T(0 - t_{CW}) = -R_{CW}^T t_{CW}$$

זו הנוסחה החשובה: וקטור ההזזה שמתקבל ישירות אינו מיקום המצלמה בעולם. כדי לקבל את מיקום המצלמה בעולם צריך להפוך את הטרנספורמציה.

8. כיוון המצלמה בעולם

מטריצת הסיבוב שמתקבלת מעבירה כיוונים ממערכת העולם למערכת המצלמה. כדי לדעת כיצד צירי המצלמה מכוונים בתוך העולם, משתמשים בסיבוב ההפוך.

$$R_{WC} = R_{CW}^{-1} = R_{CW}^T$$

במודל OpenCV הכיוון קדימה של המצלמה מזוהה עם הציר השלישי של מערכת המצלמה. לכן וקטור הכיוון קדימה במערכת המצלמה הוא:

$$e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כדי לכתוב את אותו כיוון במערכת העולם, מפעילים את הסיבוב מן המצלמה אל העולם:

$$d_W = R_{WC}e_z = R_{CW}^T e_z$$

כך מתקבלים שני דברים שונים: נוסחה אחת נותנת את מיקום מרכז המצלמה בעולם, ונוסחה שנייה נותנת את כיוון הצפייה בעולם. ביחד הם מתארים את תנוחת המצלמה.

כיוון הצפייה d_W



9. דוגמה מספרית מלאה ל-solvePnP

נניח ש-solvePnP החזירה סיבוב שהוא מטריצת היחידה, וכן וקטור הזזה המתאר את ראשית הלוח במערכת המצלמה.

$$R_{CW} = I, \quad t_{CW} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 2.0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

מאחר שאין סיבוב, גם הסיבוב ההפוך הוא מטריצת היחידה. נציב בנוסחת מיקום המצלמה בעולם:

$$O_C^W = -R_{CW}^T t_{CW} = - \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 2.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 \\ -0.1 \\ -2.0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

כלומר במערכת הלוח/העולם המצלמה נמצאת 0.3 מ' בכיוון X השלילי, 0.1 מ' בכיוון Y השלילי ו-2 מ' בכיוון Z השלילי.

כיוון הצפייה במקרה הזה נשאר הכיוון הקדמי המקורי של המצלמה, מפני שאין סיבוב:

$$d_W = R_{CW}^T e_z = I e_z = e_z$$

בדיקה אינטואיטיבית: אם ראשית הלוח נמצאת 2 מטר קדימה מן המצלמה, אז המצלמה נמצאת 2 מטר מאחור ביחס לראשית הלוח. לכן מופיע סימן מינוס.

10. השרשרת המלאה - מהתמונה עד תנוחת המצלמה

מצלמים לוח ChArUco / Chessboard מזוויות שונות.

1

מכילים את המצלמה ומוצאים את הפרמטרים הפנימיים ואת מקדמי העיוות.

2

בתמונה חדשה מזהים נקודות דו-ממדיות שמתאימות לנקודות תלת-ממדיות ידועות על הלוח.

3

solvePnP מחזירה סיבוב והזזה: מעבר מן הלוח או מערכת העולם אל מערכת המצלמה.

4

הופכים את הטראנספורמציה ומקבלים את מיקום המצלמה בעולם.

5

מהסיבוב ההפוך מקבלים גם את כיוון המצלמה בעולם.

6

$$u = f_x \frac{X_C}{Z_C} + c_x, \quad v = f_y \frac{Y_C}{Z_C} + c_y$$

$$O_C^W = -R_{CW}^T t_{CW}, \quad R_{WC} = R_{CW}^T$$