

פתרון מפורט לבוחן: תנועת מטוס ועקמומיות

גרסה מתוקנת - משיק, נורמל ראשי ועקמומיות

הקדמה: הקשר בין המשיק היחידתי T , הנורמל הראשי N ונוסחאות פרנה--סרה

לעקומה חלקה המתוארת לפי אורך הקשת s , הנוסחה הראשונה של פרנה--סרה היא

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}.$$

כאן T הוא המשיק היחידתי, N הוא הנורמל הראשי ו- κ היא העקמומיות. המשמעות הראשונה של הנוסחה היא ש-

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \parallel \mathbf{N}.$$

כלומר, כאשר כיוון המשיק משתנה לאורך המסלול, השינוי שלו מתרחש בכיוון הנורמל הראשי. במסלול המטוס הפרמטר הוא t ולא אורך הקשת s . לכן משתמשים בכלל השרשרת:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

כיוון ש-

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|,$$

נקבל

$$\mathbf{T}'(t) = \kappa(t) \|\mathbf{r}'(t)\| \mathbf{N}(t).$$

מכאן עדיין מתקיים

$$\mathbf{T}'(t) \parallel \mathbf{N}(t),$$

ולכן, כאשר $\mathbf{T}'(t) \neq 0$,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.$$

יש גם דרך פשוטה לראות מדוע $\mathbf{T}'$ מאונך ל- $\mathbf{T}$. מכיוון ש- $\mathbf{T}$ הוא וקטור יחידה,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1.$$

נגזור לפי t :

$$\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0,$$

ולכן

$$2\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0 \implies \boxed{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0}.$$

כלומר $\mathbf{T}'$ אכן מאונך למשיק. עם זאת, עצם האורתוגונליות אינה מספיקה לבדה כדי לזהות את הנורמל הראשי, כי במרחב יש אינסוף וקטורים המאונכים ל- $\mathbf{T}$. נוסחת פרנה--סרה אומרת לנו

שהכיוון המסוים של $\mathbf{T}'$ הוא כיוון ההתעקמות של העקומה, ולכן הוא הכיוון של N .
מן הנוסחה

$$\mathbf{T}'(t) = \kappa(t) \|\mathbf{r}'(t)\| \mathbf{N}(t)$$

נקבל גם נוסחה שימושית לעקמומיות:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

חלק א - המטוס נע על הקרקע במישור

מסלול ההסעה הוא

$$\gamma(u) = \left(u, \frac{u^2}{8}\right), \quad 0 \leq u \leq 3,$$

והקרקע היא המישור $z = 0$.

התחום מסתיים ב- $u = 3$, שהיא נקודת ההמראה. כך מסלול ההסעה מסתיים בדיוק במקום שבו מתחיל מסלול הטיסה.

סעיף א1

חשבו את עקמומיות המסלול כפונקציה של u . בעזרת המדידה

$$\kappa = \frac{16}{125} \text{ m}^{-1}$$

קבעו היכן נמצא המטוס ורשמו את מיקומו במרחב.

פתרון

נכתוב

$$x(u) = u, \quad y(u) = \frac{u^2}{8}.$$

נגזור פעם אחת ופעמיים:

$$x'(u) = 1, \quad x''(u) = 0, \quad y'(u) = \frac{u}{4}, \quad y''(u) = \frac{1}{4}.$$

נוסחת העקמומיות לעקומה מישורית היא

$$\kappa(u) = \frac{|x'(u)y''(u) - y'(u)x''(u)|}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}}.$$

נציב:

$$\kappa(u) = \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 + \frac{u^2}{16}\right)^{3/2}}.$$

נשווה למדידת החישוב:

$$\frac{\frac{1}{4}}{\left(1 + \frac{u^2}{16}\right)^{3/2}} = \frac{16}{125}.$$

לכן

$$\left(1 + \frac{u^2}{16}\right)^{3/2} = \frac{125}{64}.$$

נעלה בחזקה $2/3$:

$$1 + \frac{u^2}{16} = \left(\frac{125}{64}\right)^{2/3} = \frac{25}{16}.$$

מכאן

$$\frac{u^2}{16} = \frac{9}{16}, \quad u^2 = 9.$$

מתקבלים לכאורה $u = \pm 3$, אך התחום הוא $0 \leq u \leq 3$, ולכן

$$\boxed{u = 3}.$$

מיקום המטוס במישור הקרקע הוא

$$\gamma(3) = \left(3, \frac{9}{8}\right).$$

מאחר שהקרקע היא $z = 0$, מיקומו במרחב הוא

$$\boxed{P = \left(3, \frac{9}{8}, 0\right)}.$$

סעיף א2

חשבו את וקטור המשיק היחידתי למסלול בנקודה שמצאתם ואת הזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר x . הסבירו מה מייצג הווקטור בהקשר של המטוס.

פתרון

וקטור המשיק הלא-מנורמל הוא

$$\gamma'(u) = \left(1, \frac{u}{4}\right).$$

ב- $u = 3$:

$$\gamma'(3) = \left(1, \frac{3}{4}\right).$$

במרחב נוסיף רכיב z אפס:

$$\left(1, \frac{3}{4}, 0\right).$$

אורכו הוא

$$\sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}.$$

לכן המשיק היחידתי הוא

$$\mathbf{T}_{\text{ground}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right).$$

אם α היא הזווית עם הכיוון החיובי של ציר x , אז

$$\tan \alpha = \frac{3}{4},$$

ולכן

$$\alpha = \arctan \left(\frac{3}{4} \right) \approx 36.87^\circ.$$

משמעות גאומטרית ופיזיקלית: הנגזרת של המסלול מצביעה בכיוון שבו המטוס מתקדם באותו רגע. לכן המשיק היחידתי מתאר את כיוון התנועה המיידית. בהנחה שהמטוס נע קדימה ללא החלקה צדית, כלומר שהציר האורכי של המטוס מיושר עם כיוון מהירותו, זהו גם כיוון החרטום.

חלק ב - המראה וטיסה במסלול תלת-ממדי

מסלול הטיסה הוא

$$\mathbf{r}(t) = \left(3 + 4t, \frac{9}{8} + 3t + t^2, \frac{2}{3}t^3 \right), \quad t \geq 0.$$

סעיף ב1

בדקו האם המעבר ממסלול ההסעה למסלול הטיסה רציף וחלק ברגע $t = 0$. יש להתייחס הן לנקודת ההמראה והן לכיוון התנועה.

פתרון

תחילה נבדוק את נקודת ההתחלה:

$$\mathbf{r}(0) = \left(3, \frac{9}{8}, 0 \right) = P.$$

זו בדיוק נקודת הסיום של מסלול ההסעה, ולכן אין קפיצה במיקום.

כעת נגזור את מסלול הטיסה:

$$\mathbf{r}'(t) = (4, 3 + 2t, 2t^2).$$

ברגע ההמראה:

$$\mathbf{r}'(0) = (4, 3, 0).$$

מן הסעיף הקודם

$$\mathbf{T}_{\text{ground}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right),$$

ולכן

$$\mathbf{r}'(0) = 5\mathbf{T}_{\text{ground}}.$$

כלומר שני הווקטורים מקבילים ובאותו כיוון. לכן המטוס מתחיל את מסלול הטיסה מאותה נקודה ובאותו כיוון שבו הסתיים מסלול ההסעה:

$$\mathbf{r}(0) = \left(3, \frac{9}{8}, 0\right), \quad \mathbf{r}'(0) \parallel \mathbf{T}_{\text{ground}}.$$

אין ``פינה" פתאומית במסלול ברגע ההמראה.

סעיף ב2

בזמן $t = 1$ חשבו את וקטור המשיק היחידתי $\mathbf{T}$, את וקטור הנורמל הראשי $\mathbf{N}$ ואת עקמומיות מסלול הטיסה. הסבירו מה מייצג כל אחד מן הגדלים עבור המטוס.

פתרון - בדרך הישירה באמצעות $\mathbf{T}$ ו- $\mathbf{N}$

נגזור את מסלול הטיסה:

$$\mathbf{r}'(t) = (4, 3 + 2t, 2t^2).$$

ב- $t = 1$:

$$\mathbf{r}'(1) = (4, 5, 2).$$

גודל הווקטור הוא

$$\|\mathbf{r}'(1)\| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

לכן

$$\mathbf{T}(1) = \frac{(4, 5, 2)}{3\sqrt{5}}.$$

כדי למצוא את הנורמל הראשי נגזור את המשיק הנורמל עצמו. תחילה נכתוב את $\mathbf{T}(t)$ במפורש:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{(4, 3 + 2t, 2t^2)}{\sqrt{25 + 12t + 4t^2 + 4t^4}}.$$

נסמן את המכנה רק לצורך החישוב ב-

$$D(t) = \sqrt{25 + 12t + 4t^2 + 4t^4}.$$

נגזור אותו:

$$D'(t) = \frac{6 + 4t + 8t^3}{\sqrt{25 + 12t + 4t^2 + 4t^4}}.$$

ב- $t = 1$:

$$D(1) = 3\sqrt{5}, \quad D'(1) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

כעת נגזור כל רכיב של $\mathbf{T}$.

הרכיב הראשון:

$$T_1(t) = \frac{4}{D(t)},$$

ולכן

$$T_1'(1) = -\frac{4D'(1)}{D(1)^2} = -\frac{4 \cdot (6/\sqrt{5})}{45} = -\frac{8}{15\sqrt{5}}.$$

הרכיב השני:

$$T_2(t) = \frac{3+2t}{D(t)},$$

ולכן

$$T_2'(1) = \frac{2D(1) - 5D'(1)}{D(1)^2} = \frac{2(3\sqrt{5}) - 5(6/\sqrt{5})}{45} = 0.$$

הרכיב השלישי:

$$T_3(t) = \frac{2t^2}{D(t)},$$

ולכן

$$T_3'(1) = \frac{4D(1) - 2D'(1)}{D(1)^2} = \frac{4(3\sqrt{5}) - 2(6/\sqrt{5})}{45} = \frac{16}{15\sqrt{5}}.$$

לכן

$$\mathbf{T}'(1) = \left(-\frac{8}{15\sqrt{5}}, 0, \frac{16}{15\sqrt{5}} \right) = \frac{8}{15\sqrt{5}}(-1, 0, 2).$$

כיוון $\mathbf{T}'(1)$ הוא אפוא $(-1, 0, 2)$. ננרמל:

$$\|(-1, 0, 2)\| = \sqrt{5},$$

ולכן

$$\boxed{\mathbf{N}(1) = \frac{(-1, 0, 2)}{\sqrt{5}}}.$$

בדיקה: הנורמל אכן מאונך למשיק, משום ש

$$(4, 5, 2) \cdot (-1, 0, 2) = -4 + 4 = 0.$$

חשוב לזכור: תנאי האורתוגונליות לבדו אינו מספיק כדי למצוא את N , כי במרחב יש אינסוף כיוונים המאונכים ל- T . נוסחת פרנה--סרה אומרת לנו שהכיוון של T' הוא הכיוון שבו המסלול עצמו מתעקם.

כדי לחשב את העקמומיות נשתמש בנוסחה מן ההקדמה:

$$\kappa(1) = \frac{\|\mathbf{T}'(1)\|}{\|\mathbf{r}'(1)\|}.$$

מתקיים

$$\|\mathbf{T}'(1)\| = \frac{8}{15\sqrt{5}}\sqrt{5} = \frac{8}{15}.$$

ולכן

$$\kappa(1) = \frac{8/15}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{45\sqrt{5}}.$$

המשמעות:

- T מצביע בכיוון התנועה המיידית של המטוס.
- N מצביע לכיוון שבו כיוון התנועה משתנה, כלומר לכיוון ההתקדמות של המסלול.
- κ מודדת את עוצמת ההתקדמות; ערך גדול יותר פנייה חדה יותר.

סעיף ב3

בזמן $t = 1$ נמצא לפני המטוס מכשול נמוך באזור שבו ערכי x גדולים יותר. מערכת ההיגוי יכולה לבצע תיקון קטן בכיוון $N(1)$ או בכיוון ההפוך $-N(1)$. באיזה כיוון כדאי לבחור כדי להתחיל להרחיק את מסלול המטוס מן המכשול? נמקו באמצעות רכיבי הווקטור.

פתרון

מצאנו

$$N(1) = \frac{(-1, 0, 2)}{\sqrt{5}}.$$

לכיוון $+N$ יש רכיב x שלילי ורכיב z חיובי. לכן תיקון בכיוון זה מתחיל להסיט את כיוון התנועה לעבר ערכי x קטנים יותר ובו-זמנית להגדיל את רכיב העלייה. בכיוון $-N$ מתקבלים הסימנים ההפוכים. לכן יש לבחור

$$+N(1).$$

אין פירוש הדבר שהמטוס משנה מיד את מיקומו בכיוון N ; מדובר בתיקון רגעי שמשנה בהדרגה את כיוון התנועה ואת צורת המסלול.

חלק ג - בדיקת התנגשות במגדל

המגדל מיוצג באמצעות התיבה

$$B = \{(x, y, z) : 8 \leq x \leq 10, 6 \leq y \leq 10, 0 \leq z \leq 4\}.$$

לצורך סעיף זה המטוס מיוצג כנקודה הנעה אך ורק על המסלול $r(t)$.

סעיף ג

קבעו האם מסלול המטוס מתנגש במגדל. אם מתרחשת התנגשות, מצאו את זמן הכניסה הראשון לתיבה ואת נקודת הפגיעה הראשונה. יש להצדיק את המסקנה באופן מתמטי מלא.

פתרון

כדי שהמטוס יהיה בתוך התיבה, שלוש הקואורדינטות שלו צריכות לקיים בו-זמנית את שלושת תחומי הערכים.

נתחיל מקואורדינטת x :

$$x(t) = 3 + 4t.$$

נדרוש

$$8 \leq 3 + 4t \leq 10.$$

מכאן

$$5 \leq 4t \leq 7,$$

ולכן

$$\boxed{\frac{5}{4} \leq t \leq \frac{7}{4}}.$$

רק בתחום זמן זה המטוס עשוי להיות בתוך המגדל.

כעת נבדוק את y ואת z באותו תחום:

$$y(t) = \frac{9}{8} + 3t + t^2, \quad z(t) = \frac{2}{3}t^3.$$

עבור $t \geq 0$ מתקיים

$$y'(t) = 3 + 2t > 0, \quad z'(t) = 2t^2 \geq 0.$$

לכן שתי הפונקציות עולות, ומספיק לבדוק את ערכיהן בקצות התחום.

ב- $t = 5/4$:

$$y\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{103}{16} = 6.4375, \quad z\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{125}{96} \approx 1.302.$$

ב- $t = 7/4$:

$$y\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{151}{16} = 9.4375, \quad z\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{343}{96} \approx 3.573.$$

לכן לאורך כל התחום $5/4 \leq t \leq 7/4$ מתקיים גם

$$6 \leq y(t) \leq 10, \quad 0 \leq z(t) \leq 4.$$

יחד עם תנאי x , המסלול אכן עובר בתוך התיבה.

לפני $t = 5/4$ מתקיים $x(t) < 8$, ולכן המטוס עדיין מחוץ למגדל. מכאן שזמן הכניסה הראשון הוא

$$\boxed{t_{\text{hit}} = \frac{5}{4}}.$$

נקודת הכניסה הראשונה היא

$$\mathbf{r}\left(\frac{5}{4}\right) = \left(8, \frac{103}{16}, \frac{125}{96}\right).$$

לכן

$$\boxed{P_{\text{hit}} = \left(8, \frac{103}{16}, \frac{125}{96}\right)}.$$

הפגיעה הראשונה מתרחשת בפאה $x = 8$ של התיבה.

סיכום התוצאות

$$u = 3, \quad P = \left(3, \frac{9}{8}, 0\right),$$

$$\mathbf{T}_{\text{ground}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), \quad \alpha \approx 36.87^\circ,$$

$$\mathbf{T}(1) = \frac{(4, 5, 2)}{3\sqrt{5}}, \quad \mathbf{N}(1) = \frac{(-1, 0, 2)}{\sqrt{5}},$$

$$\kappa(1) = \frac{8}{45\sqrt{5}}, \quad t_{\text{hit}} = \frac{5}{4},$$

$$P_{\text{hit}} = \left(8, \frac{103}{16}, \frac{125}{96}\right).$$