

## מרכז מסה ומרכז כובד

מעבר מהמקרה הבדיד לאינטגרלים, צפיפויות ודוגמאות יישומיות

### הרעיון הבסיסי

מרכז המסה הוא נקודה אחת שמייצגת את מיקום המסה הכוללת של מערכת. במקרה של מסות נקודתיות  $m_i$  הממוקמות בנקודות  $x_i$ , על ישר

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

זהו ממוצע משוקלל: מסה גדולה יותר משפיעה יותר על מיקום המרכז.

לדוגמה, אם  $m_1 = 1$  בנקודה  $x_1 = 0$  ו- $m_2 = 3$  בנקודה  $x_2 = 10$ ,

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 10}{1 + 3} = 7.5.$$

מרכז המסה קרוב יותר למסה הגדולה.

### המעבר למקרה הרציף: צפיפות ואינטגרלים

בגוף רציף אין לנו מספר סופי של מסות. במקום זאת המסה מפוזרת, ולכן אנו מתארים אותה בצפיפות

#### מוט-צפיפות ליניארית 2.1

אם  $\lambda(x)$  היא המסה ליחידת אורך, אז לחתיכה קטנה באורך  $dx$  יש מסה

$$dm = \lambda(x) dx.$$

לכן

$$M = \int_a^b \lambda(x) dx, \quad \bar{x} = \frac{\int_a^b x \lambda(x) dx}{\int_a^b \lambda(x) dx}.$$

המעבר מהסכום לאינטגרל מתקבל מחלוקה לחתיכות קטנות:

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_i x_i \lambda(x_i) \Delta x}{\sum_i \lambda(x_i) \Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int x \lambda(x) dx}{\int \lambda(x) dx}.$$

#### שלוש צפיפויות על אותו קטע 2.2

ניקח  $0 \leq x \leq 1$ .

| צפיפות             | מסה כוללת                       | מרכז מסה                |
|--------------------|---------------------------------|-------------------------|
| $\lambda(x) = 1$   | $\int_0^1 1 dx = 1$             | $\bar{x} = \frac{1}{2}$ |
| $\lambda(x) = x$   | $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$   | $\bar{x} = \frac{2}{3}$ |
| $\lambda(x) = x^2$ | $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ | $\bar{x} = \frac{3}{4}$ |

ככל שהצפיפות מتركזת יותר ליד  $x = 1$  מרכז המסה אז ימינה. באופן כללי, אם  $\lambda(x) = x^n$  על  $[0, 1]$ , אז

$$\bar{x} = \frac{n+1}{n+2}.$$

## 2.3 צפיפות שטחית ונפחית

ללוח או למשטח עם צפיפות שטחית  $\sigma$ :

$$dm = \sigma dA, \quad M = \iint_S \sigma dA, \quad \bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M} \iint_S \mathbf{r} \sigma dA.$$

ממדי עם צפיפות נפחית-לגוף תלת  $\rho$ :

$$dm = \rho dV, \quad M = \iiint_{\Omega} \rho dV, \quad \bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \mathbf{r} \rho dV.$$

**הבחנה חשובה:** ספירה  $S_R$  היא המשטח  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  כדור מלא  $B_R$  הוא התחום  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . נפחי  $dV$  עובר ספירה משתמשים באינטגרל משטחי  $dA$  עובר כדור מלא משתמשים באינטגרל; נפחי  $dV$ .

### 3. ספירה אחידה: חישוב מלא של מרכז המסה

ניקח קליפה כדורית דקה ואחידה ברדיוס  $R$ :

$$S_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

עם צפיפות שטחית קבועה  $\sigma_0$ .

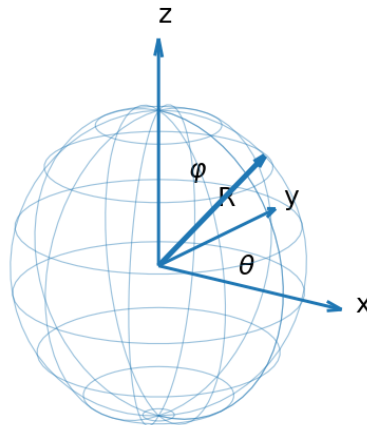
#### 3.1 פרמטריזציה של הספירה

נשתמש בזוויות  $\varphi$  ו- $\theta$ :

$$X(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi),$$

כאשר

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$



#### מאיפה מגיע אלמנט השטח $dA$ ?

נגזור את הפרמטריזציה:

$$X_\varphi = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi),$$

$$X_\theta = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \cos \theta, 0).$$

אלמנט השטח הוא

$$dA = \|X_\varphi \times X_\theta\| d\varphi d\theta.$$

חישוב המכפלה הווקטורית נותן

$$\|X_\varphi \times X_\theta\| = R^2 \sin \varphi,$$

ולכן

$$\boxed{dA = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta}.$$

אפשר גם להבין זאת גאומטרית: תא קטן על הספירה הוא בקירוב מלבן שצלעותיו  $R d\varphi$  ו- $R d\theta$  מכפלתן נותנת  $R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$ .

### המסה הכוללת 3.3

$$M = \iint_{S_R} \sigma_0 dA = \sigma_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

מפרידים:

$$M = \sigma_0 R^2 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right).$$

כיוון ש

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi, \quad \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2,$$

נקבל

$$\boxed{M = 4\pi R^2 \sigma_0}.$$

### חישוב $\bar{x}$ 3.4

על הספירה

$$x = R \sin \varphi \cos \theta.$$

לכן

$$\bar{x} = \frac{\sigma_0}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (R \sin \varphi \cos \theta) R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

כלומר

$$\bar{x} = \frac{\sigma_0 R^3}{M} \left( \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \right) \left( \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right).$$

אבל

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0,$$

ולכן

$$\boxed{\bar{x} = 0}.$$

### חישוב $\bar{y}$ 3.5

באופן דומה,  $y = R \sin \varphi \sin \theta$ , ולכן מופיע הגורם,

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0.$$

מכאן

$$\boxed{\bar{y} = 0}.$$

### חישוב $\bar{z}$ 3.6

כאן  $z = R \cos \varphi$  , ולכן ,

$$\bar{z} = \frac{\sigma_0 R^3}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

האינטגרל הפנימי הוא

$$\int_0^\pi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^\pi = 0,$$

ולכן

$$\boxed{\bar{z} = 0}.$$

בסיכום,

$$\boxed{G = (0, 0, 0)}.$$

זהו מרכז הספירה, בדיוק כפי שהסימטריה מנבאת.

## 4. צפיפויות של חומרים.

הערכים הבאים הם ערכים טיפוסיים בקירוב; בפועל הצפיפות משתנה מעט לפי הרכב החומר והטמפרטורה.

| חומר         | $\rho$ ב- $\text{g/cm}^3$ | $\rho$ ב- $\text{kg/m}^3$ |
|--------------|---------------------------|---------------------------|
| זכוכית רגילה | 2.50                      | 2500                      |
| אלומיניום    | 2.70                      | 2700                      |
| ברזל         | 7.87                      | 7870                      |
| נחושת        | 8.96                      | 8960                      |
| עופרת        | 11.34                     | 11340                     |

אם קליפה דקה בעובי קבוע  $t$  עשויה מחומר בעל צפיפות נפחית  $\rho$  אז הצפיפות השטחית שלה היא בקירוב ,

$$\boxed{\sigma = \rho t}.$$

## 5. ספירה משני חומרים: חצי ברזל וחצי זכוכית.

ניקח שתי חצאי קליפה כדורית דקה באותו רדיוס  $R$  ובאותו עובי  $t$  ונחבר אותן לאורך קו המשווה , :

החצי העליון)  $z > 0$  . עשוי ברזל )

החצי התחתון)  $z < 0$  . עשוי זכוכית .)

## סעיף 5.1: המסה הכוללת - בחירת תחום הזווית

לפני כתיבת האינטגרל צריך לדייק מה מייצגת הזווית הקוטבית. בפרמטריזציה שנבחרה היא נמדדת מן הכיוון החיובי של הציר האנכי, ולא ממישור קו המשווה

$$X(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$$

הרכיב השלישי בפרמטריזציה הוא הגובה של הנקודה מעל מישור קו המשווה

$$z = R \cos \varphi$$

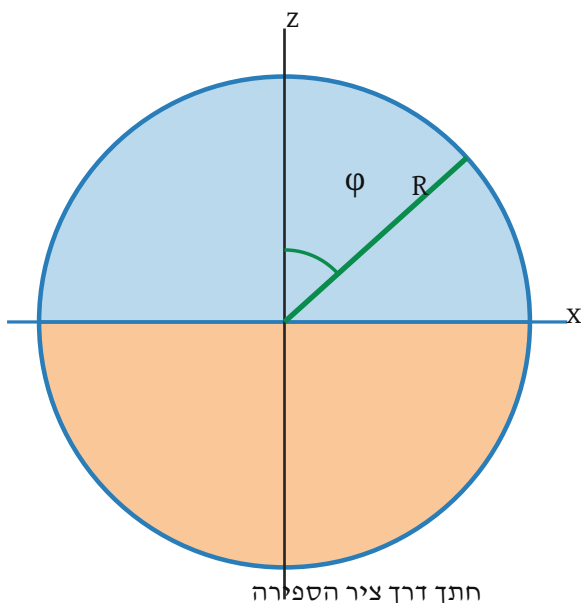
חצי הספירה העליון מורכב בדיוק מן הנקודות שגובהן אינו שלילי. לכן

$$z \geq 0 \Leftrightarrow R \cos \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \cos \varphi \geq 0$$

בתחום הרגיל של הזווית הקוטבית מתקבל  
 $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

כל ערך קבוע של הזווית הקוטבית מתאר מעגל אופקי. הזווית השנייה מסתובבת סיבוב מלא סביב הציר האנכי ולכן תחומה נשאר סיבוב שלם

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$



### בדיקת נקודות הקצה

$$\varphi = 0 \Rightarrow z = R$$

הקוטב העליון.

$$\varphi = \pi/2 \Rightarrow z = 0$$

קו המשווה.

$$\pi/2 < \varphi \leq \pi \Rightarrow z < 0$$

חצי הספירה התחתון.

חשוב: עבור הספירה כולה הזווית הקוטבית ממשיכה עד הקוטב התחתון. רק באינטגרל על חצי הברזל העליון עוצרים בקו המשווה.

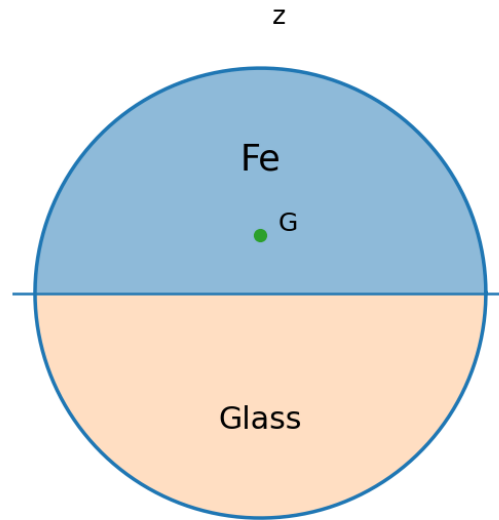
חצי הספירה העליון

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

הספירה כולה

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

הכללת קו המשווה בשני החצאים אינה משנה את המסה, מפני ששטחו המשותף אפס.



בגלל הסימטריה הסיבובית סביב ציר  $z$ ,

$$\bar{x} = \bar{y} = 0.$$

נחשב את  $\bar{z}$  באינטגרל משטחי, בלי להשתמש מראש בתוצאה של מרכז מסה של חצי ספירה.

הצפיפויות השטחיות הן

$$\sigma_{\text{Fe}} = \rho_{\text{Fe}} t, \quad \sigma_{\text{G}} = \rho_{\text{G}} t.$$

## 5.1 המסה הכוללת

בחצי העליון  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ :

$$M_{\text{Fe}} = \rho_{\text{Fe}} t R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 2\pi R^2 t \rho_{\text{Fe}}.$$

בחצי התחתון  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ :

$$M_{\text{G}} = 2\pi R^2 t \rho_{\text{G}}.$$

לכן

$$M = 2\pi R^2 t (\rho_{\text{Fe}} + \rho_{\text{G}}).$$

## 5.2 המומנט ביחס למישור $xy$

בחצי העליון:

$$Q_{\text{Fe}} = \iint z dm = \rho_{\text{Fe}} t R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

כיוון ש

$$\int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2},$$

נקבל

$$Q_{\text{Fe}} = \pi R^3 t \rho_{\text{Fe}}.$$

בחצי התחתון האינטגרל הוא  $1/2$ —ולכן ,

$$Q_G = -\pi R^3 t \rho_G.$$

מכאן

$$\bar{z} = \frac{Q_{Fe} + Q_G}{M} = \boxed{\frac{R}{2} \frac{\rho_{Fe} - \rho_G}{\rho_{Fe} + \rho_G}}.$$

מהטבלה:

$$\rho_{Fe} = 7.87, \quad \rho_G = 2.50 \quad [\text{g/cm}^3].$$

לכן

$$\bar{z} = \frac{R}{2} \frac{7.87 - 2.50}{7.87 + 2.50} \approx 0.259R.$$

אם  $R = 10 \text{ cm}$ ,

$$\boxed{G \approx (0, 0, 2.59 \text{ cm})}.$$

מרכז המסה זה לכיוון הברזל, כפי שהיינו מצפים.

## שאלה 6: דוגמה יישומית - סידור מטען במטוס

מרכז הכובד של מטוס חייב להישאר בתוך תחום בטוח שנקבע על ידי היצרן. העמסה קדמית או אחורית מדי יכולה ליצור מומנט גדול סביב ציר העלרוד ולהגדיל את הדרישה ל-trim.

נבחר ציר  $x$ : לאורך המטוס, מהחרטום לאחור. נניח

$$M_0 = 20000 \text{ kg}, \quad x_0 = 14.5 \text{ m}$$

למטוס הריק. יש שני אזורי מטען:

$$x_F = 10 \text{ m}, \quad x_R = 20 \text{ m},$$

המסה הכוללת של המטען היא ארבעת אלפים קילוגרמים. חשבו כמה יש להעמיס בכל תא, כך שמרכז הכובד לאחר ההעמסה יהיה

$$x_G = 15 \text{ m}.$$

פתרון. נסמן את מסות המטען בתא הקדמי ובתא האחורי. מכיוון שסך המטען הוא ארבעת אלפים קילוגרמים, מתקיים

$$\boxed{m_F + m_R = 4000}.$$

וכן

$$15 = \frac{20000(14.5) + 10m_F + 20m_R}{24000}.$$

נכפול ב-24000:

$$360000 = 290000 + 10m_F + 20m_R,$$

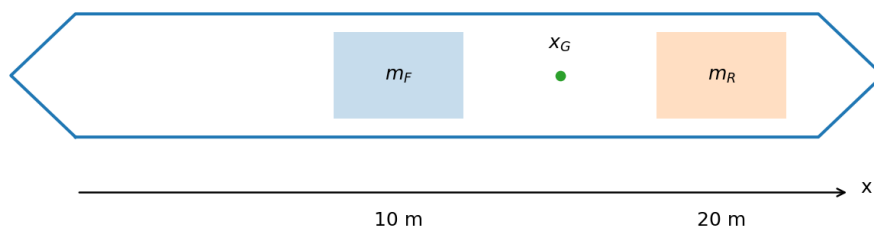
ולכן

$$m_F + 2m_R = 7000.$$



יחד עם  $m_F + m_R = 4000$  נקבל

$$m_R = 3000 \text{ kg}, \quad m_F = 1000 \text{ kg}.$$



## גרסה רציפה 6.1

אם תא המטען משתרע לאורך  $8 \leq x \leq 22$  והמטען מתואר בצפיפות ליניארית  $\lambda(x)$ , אז

$$M_C = \int_8^{22} \lambda(x) dx, \quad x_C = \frac{\int_8^{22} x \lambda(x) dx}{\int_8^{22} \lambda(x) dx}.$$

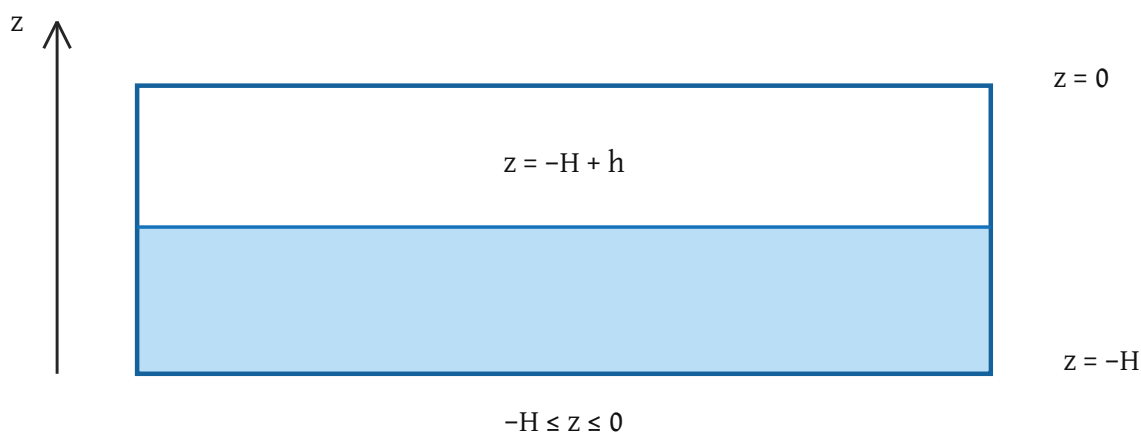
מרכז הכובד של המטוס כולו הוא

$$x_G = \frac{M_0 x_0 + \int_8^{22} x \lambda(x) dx}{M_0 + \int_8^{22} \lambda(x) dx}.$$

כך אפשר להפוך את בעיית ההעמסה לבעיית תכנון: לבחור  $\lambda(x)$  כך ש- $x_G$  יישאר בתחום הבטוח.

## לקראת שאלה 7: מערכת הצירים במכל

בשאלה הבאה ראשית הציר האנכי נמצאת בגובה המכל והכיוון החיובי הוא כלפי מעלה. לכן נקודות הנמצאות בתוך המכל מקבלות ערכי גובה שאינם חיוביים.



הניסוח המלא, פירוש כל הסימנים ורשימת הסעיפים מופיעים בעמוד הבא.

## שאלה 7: רחפן עם מכל נוזל מלא חלקית

רחפן חקלאי נושא מכל מלבני המחובר לגוף הרחפן. כל הקואורדינטות להלן נמדדות במערכת הצירים של הרחפן.

### מערכת הצירים ותחום המכל

ראשית הציר האנכי נמצאת במישור העליון של המכל, והכיוון החיובי של הציר האנכי הוא כלפי מעלה. תחום המכל הוא

$$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -H \leq z \leq 0$$

### פירוש מפורש של הסימנים

|              |                                                               |
|--------------|---------------------------------------------------------------|
| $a > 0$      | מחצית אורך המכל בכיוון האופקי; אורכו הכולל הוא פעמיים ערך זה  |
| $b > 0$      | מחצית רוחב המכל; רוחבו הכולל הוא פעמיים ערך זה                |
| $H > 0$      | גובה המכל; הגג נמצא בגובה אפס והקרקעית בגובה מינוס גובה המכל  |
| $0 < h < H$  | עומק הנוזל מעל הקרקעית במצב מאוזן; הנוזל ממלא רק חלק מן המכל  |
| $\rho_L > 0$ | הצפיפות הנפחית הקבועה של הנוזל; זו אינה פונקציה של המיקום     |
| $M_D > 0$    | מסת הרחפן היבש, בלי הנוזל; סימן זה אינו מציין מרכז מסה        |
| $x_D = 0$    | המיקום האופקי של מרכז המסה של הרחפן היבש                      |
| $\alpha$     | זווית ההטיה של הרחפן סביב הציר הרוחבי; כיוון הסימן מוגדר להלן |

הרחפן מוטה בזווית אלפא סביב הציר הרוחבי. בהטיה חיובית הקצה שבכיוון החיובי של הציר האופקי עולה. פני הנוזל נשארים אופקיים ביחס לכבידה. הניחו שההטיה קטנה דיה כך שפני הנוזל נשארים בתוך המכל

תאוצת הכובד מסומנת כך  $g$

### נדרש

- הסבירו מדוע בתוך המכל מתקיים שהגובה אינו חיובי, ומצאו את גובה פני הנוזל במצב המאוזן
- גזרו במערכת הרחפן את משוואת פני הנוזל לאחר הטיה: גובה פני הנוזל כפונקציה של הקואורדינטה האופקית
- מצאו תנאי על הזווית המבטיח שפני הנוזל אינם פוגעים בגג או בקרקעית
- הוכיחו שנפח הנוזל נשמר וחשבו את מסת הנוזל
- חשבו את הקואורדינטה האופקית של מרכז מסת הנוזל כתלות בזווית
- חשבו את מרכז המסה הכולל של הרחפן והנוזל ואת גודל המומנט הכבידתי
- לזוויות שערכן המוחלט עד חמש עשרה מעלות, נסחו תנאי תכנון המבטיח שהסטת מרכז המסה הכולל אינה עולה על שני סנטימטרים ושפני הנוזל נשארים בתוך המכל

## פתרון לשאלה 7 - חלק א: מערכת הצירים ופני הנוזל

### סעיף א: מדוע ערכי הגובה שליליים

הסימן השלילי אינו מציין גובה פיזיקלי שלילי ביחס לקרקע. זו רק בחירה של ראשית הצירים: המישור העליון של המכל מוגדר כגובה אפס, והקרקעית נמצאת מתחתיו. לכן כל נקודה בתוך המכל מקבלת ערך שאינו חיובי

$$z = 0 \mid z = -H$$

נסמן את גובה הנוזל מעל הקרקעית באות הלטינית הקטנה. במצב המאוזן פני הנוזל נמצאים בגובה הבא

$$z_s = -H + h$$

אם הנוזל אינו ממלא את המכל כולו, הגובה הזה נמצא בין הקרקעית לבין המישור העליון ולכן הוא שלילי

$$0 < h < H \Rightarrow -H < -H + h < 0$$

### סעיף ב: מקור הסימן השלילי בשיפוע

נסמן באות גדולה את הקואורדינטה האנכית במערכת העולם. לפי מוסכמת ההטיה שנבחרה, הקשר בין הקואורדינטות במערכת הרחפ לבין הגובה בעולם הוא

$$Z = x \sin \alpha + z \cos \alpha$$

פני נוזל במנוחה מאונכים לכבידה ולכן הגובה בעולם קבוע עליהם. פתרון המשוואה עבור הקואורדינטה האנכית במערכת הרחפ נותן

$$z = Z_0 / \cos \alpha - x \tan \alpha$$

סימן המינוס נובע ממוסכמת הכיוון: הקצה החיובי של המכל עלה, ולכן כדי להישאר באותו גובה בעולם פני הנוזל מופיעים בגובה נמוך יותר במערכת הרחפ כאשר מתקדמים בכיוון החיובי

סימטריית המכל ושימור הנפח קובעים שבמרכז המכל החיתוך נשאר בגובה המאוזן. לכן מתקבלת המשוואה

$$z_s(x) = -H + h - x \tan \alpha$$

### סעיף ג: התנאי שלא תהיה פגיעה בגג או בקרקעית

הגובה המקומי של עמודת הנוזל הוא ההפרש בין פני הנוזל לבין הקרקעית

$$u(x) = h - x \tan \alpha$$

$$a |\tan \alpha| \leq \min(h, H - h)$$

## פתרון לשאלה 7 - חלק ב

### סעיף ד: שימור הנפח ומסת הנוזל

נבצע אינטגרציה של הגובה המקומי על מלבן הבסיס. האיבר האי זוגי מתאפס בגלל הסימטריה סביב ראשית הציר האופקי.

$$V_L = \int_{-a}^a \int_{-b}^b (h - x \tan \alpha) dy dx$$

$$V_L = 2b [2ah - \tan \alpha \int_{-a}^a x dx] = 4abh$$

$$M_L = \rho_L V_L = 4\rho_L abh$$

### סעיף ה: ההסטה האופקית של מרכז מסת הנוזל

הצפיפות קבועה ולכן היא מצטמצמת במנה המגדירה את מרכז המסה

$$\bar{x}_L = (1/V_L) \int_{-a}^a \int_{-b}^b x(h - x \tan \alpha) dy dx$$

$$\bar{x}_L = [2b/(4abh)] [h \int_{-a}^a x dx - \tan \alpha \int_{-a}^a x^2 dx]$$

$$\int_{-a}^a x dx = 0, \int_{-a}^a x^2 dx = 2a^3/3$$

$$\bar{x}_L(\alpha) = -[a^2/(3h)] \tan \alpha$$

כאשר ההטיה חיובית, הצד החיובי של המכל עולה והנוזל נע לצד השלילי. לכן גם הסימן של הסטת מרכז המסה שלילי, בהתאם לנוסחה.

### סעיף ו: מרכז המסה הכולל והמומנט הכבידתי

$$\bar{x}_{total} = [M_L/(M_D + M_L)] \bar{x}_L$$

$$|\tau_y| \approx (M_D + M_L)g|\bar{x}_{total}| = M_L g[a^2/(3h)]|\tan \alpha|$$

### סעיף ז: תנאי תכנון לזווית מרבית של חמש עשרה מעלות

כדי שההסטה הכוללת לא תעלה על שני סנטימטרים, ובו בזמן פני הנוזל יישארו בתוך המכל, נדרוש את שני התנאים הבאים:

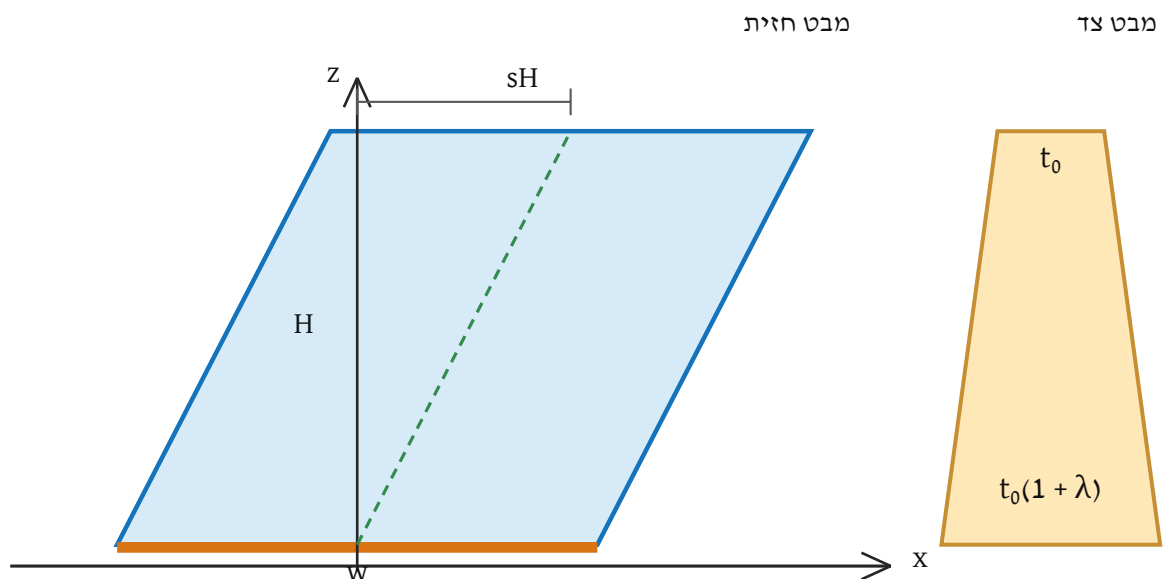
$$[M_L/(M_D + M_L)] [a^2/(3h)] \tan 15^\circ \leq 0.02 \text{ m}$$

$$a \tan 15^\circ \leq \min(h, H - h)$$

שרשרת הסיבה: הטיה גורמת לשינוי צורת הנוזל, לשינוי מרכז המסה, למומנט ולצורך בתיקון מנועים

## שאלה 8: הפסל הנטוי בעל העובי המשתנה

מתכננים להדפיס בתלת-ממד פסל שנראה כאילו הוא עומד ליפול ימינה. מבט החזית שלו הוא מקבילית נטויה, אך העובי בכיוון המאונך לציור גדל כלפי הבסיס וכך מזיז את מרכז הכובד שמאלה ולמטה.



### המודל המתמטי

$$H, w, s > 0, sH$$

$$t_0, \lambda, \rho$$

גובה, רוחב, פרמטר נטייה והסטה עליונה

עובי עליון, פרמטר שינוי וצפיפות נפחית

$$D = \{(x, z) : 0 \leq z \leq H, sz - w/2 \leq x \leq sz + w/2\}$$

$$t(z) = t_0[1 + \lambda(1 - z/H)], \lambda \geq 0$$

### שאלה 8א: אלמנט המסה

מצאו את העובי בחלק העליון ובבסיס. לאחר מכן כתבו את אלמנט המסה והגדירו צפיפות שטחית שקולה.

### פתרון 8א

מציבים בפונקציית העובי את שני ערכי הקצה של הגובה

$$t(H) = t_0, t(0) = t_0(1 + \lambda)$$

לחתיכת שטח קטנה במבט החזית יש נפח השווה לשטח החתיכה כפול העובי המקומי

$$dV = t(z) dx dz, dm = \rho t(z) dx dz$$

$$\sigma(z) = \rho t(z), dm = \sigma(z) dA$$

## שאלה 8: מסה ומרכז כובד

### שאלה 8ב: המסה הכוללת

חשבו את מסת הפסל כתלות בפרמטר העובי

### פתרון 8ב

בכל גובה רוחב המקבילית הוא קבוע ושווה לרוחב הנתון. לכן האינטגרל הפנימי נותן

$$M = \rho \int_0^H \int_{sz-w/2}^{sz+w/2} t(z) dx dz$$

$$M = \rho w t_0 \int_0^H [1 + \lambda(1 - z/H)] dz$$

$$M = \rho w t_0 H (1 + \lambda/2)$$

המסה גדלה ביחס לפסל שעוביו אחיד פי אחד ועוד מחצית מפרמטר העובי

### שאלה 8ג: מרכז הכובד

חשבו את שלוש הקואורדינטות של מרכז הכובד והסבירו את הקשר בין הקואורדינטה האופקית לבין גובה המרכז

### פתרון 8ג

מרכזו של כל חתך אופקי נמצא על הקו הנטוי. לכן

$$\int_{sz-w/2}^{sz+w/2} x dx = wsz$$

האינטגרל המשותף הדרוש לשתי הקואורדינטות הוא

$$\int_0^H z t(z) dz = t_0 H^2 (1/2 + \lambda/6)$$

$$\bar{z} = H(3 + \lambda)/[3(2 + \lambda)]$$

$$\bar{x} = sH(3 + \lambda)/[3(2 + \lambda)] = s\bar{z}, \bar{y} = 0$$

הקואורדינטה השלישית מתאפסת בגלל הסימטריה של העובי סביב המישור האמצעי. כאשר פרמטר העובי גדל, יותר מסה מרוכזת סמוך לבסיס; לכן גם הגובה של מרכז הכובד וגם הסטתו ימינה קטנים.

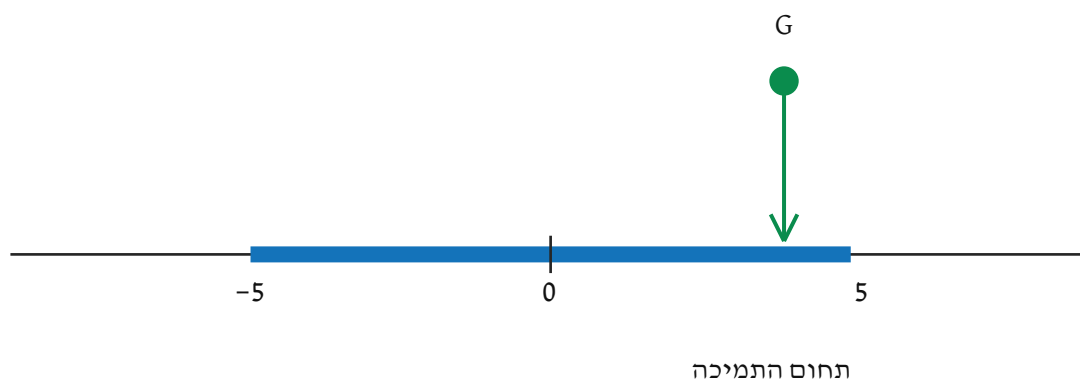
## שאלה 8: תנאי היציבות

### שאלה 8ד: מהו העובי המזערי הדרוש

נתונים גובה שלושים סנטימטרים, רוחב עשרה סנטימטרים והסטה אופקית של החלק העליון בשנים עשר סנטימטרים. מצאו את התנאי על פרמטר העובי

### פתרון 8ד

הפסל עומד על הקטע שבין מינוס חמישה לחמישה סנטימטרים. בשדה כבידה אחיד הוא יציב כל עוד ההיטל האנכי של מרכז הכובד נמצא בתוך תחום התמיכה



מאחר שהפסל נוטה ימינה, די לבדוק את הקצה הימני של הבסיס

$$\bar{x} < w/2$$

$$12(3 + \lambda)/[3(2 + \lambda)] < 5$$

$$12(3 + \lambda) < 15(2 + \lambda)$$

$$36 + 12\lambda < 30 + 15\lambda$$

$$\lambda > 2$$

כאשר פרמטר העובי שווה בדיוק לשתיים, מרכז הכובד נמצא מעל קצה הבסיס. זהו מצב גבולי: הפרעה קטנה עלולה להפיל את הפסל. לכן לעמידה יציבה נדרש ערך גדול משתיים, ובתכנון מעשי כדאי לדרוש גם מרווח בטיחות

יציבות אינה רק שוויון מתמטי: מרכז הכובד צריך להיות בתוך הבסיס, לא על שפתו

## שאלה 8: בדיקת תכן ומרווח בטיחות

### שאלה 8ה: בדיקת דגם מודפס

נבחר עובי עליון של שני מילימטרים ופרמטר עובי השווה לשלוש. חשבו את עובי הבסיס, את מרכז הכובד ואת מרווח היציבות.

### פתרון 8ה

$$t_{\text{top}} = 2 \text{ mm}, t_{\text{bottom}} = 2(1 + 3) = 8 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = 30(3 + 3)/[3(2 + 3)] = 12 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = (12/30)\bar{z} = 4.8 \text{ cm}$$

$$5 - \bar{x} = 0.2 \text{ cm} = 2 \text{ mm}$$

הפסל עומד, אך ההיטל נמצא רק שני מילימטרים מקצה הבסיס ולכן התכנון רגיש להפרעות.

### שאלה 18: תכנון עם מרווח בטיחות

דרשו שמרכז הכובד יהיה לפחות חצי סנטימטר בתוך הבסיס. מצאו את פרמטר העובי המזערי ואת עובי הבסיס כאשר העובי העליון הוא שני מילימטרים.

### פתרון 18

הקצה הימני נמצא בחמישה סנטימטרים, ולכן דרישת הבטיחות היא

$$\bar{x} \leq 5 - 0.5 = 4.5 \text{ cm}$$

$$12(3 + \lambda)/[3(2 + \lambda)] \leq 4.5$$

$$\lambda \geq 6, t_{\text{bottom}} = 2(1 + 6) = 14 \text{ mm}$$

התוצאה מדגישה פשרה תכנונית: הגדלת העובי בבסיס משפרת את היציבות, אך גם מגדילה את המסה ואת זמן ההדפסה. במקרה זה המסה גדולה פי ארבעה מן המסה של פסל שעוביו אחיד ושווה לעובי העליון. ביישום אמיתי אפשר להשוות פתרון זה להוספת משקולת קטנה וצפופה סמוך לבסיס.



## סעיף 9: סיכום

בכל הדוגמאות העיקרון זהה: מרכז המסה מתקבל מחלוקת המומנט הראשון של המסה במסה הכוללת. מה שמשתנה הוא צורת התפלגות המסה ואלמנט המסה המתאים לבעיה.

מרכז המסה מתקבל מחלוקת המומנט הראשון במסה הכוללת

### אלמנט המסה בארבעת המצבים

$dm = \lambda dx$  מוט או עקומה

$dm = \sigma dA$  קליפה או משטח

$dm = \rho t dA$  גוף דק בעל עובי משתנה

$dm = \rho dV$  גוף תלת-ממדי

### הלקחים מן הדוגמאות

- ספירה.** מרכז המסה נע אל החומר הצפוף יותר.
- מטוס.** יש לבחור את פיזור המטען כך שמרכז הכובד יישאר בתחום הבטוח.
- מכל נוזל.** ההסטה משנה את צורת תחום הנוזל ולכן גם את מרכז המסה.
- עובי משתנה.** גם כאשר הצפיפות הנפחית קבועה, שינוי העובי משנה את צפיפות השטח ואת מרכז הכובד.
- מערכת צירים.** סימן שלילי אינו בהכרח מציין מיקום פיזיקלי מתחת לקרקע.
- אינטגרציה.** חשוב לזהות תחילה את התחום הגאומטרי ואת גבולות הפרמטרים.

בשאלות יישומיות הסדר המומלץ הוא: לבחור מערכת צירים, לתאר את התחום, לקבוע את אלמנט המסה, לחשב מסה ומומנט ראשון, ולבסוף לבדוק אם התוצאה מתאימה לאינטואיציה הפיזיקלית ולמגבלות התכנון.